GRUPOS Y HOMOMORFISMOS ASOCIADOS CON UN SEMIGRUPO, I

POR JULIO RAFAEL BASTIDA

En este trabajo se introducen ciertos grupos y homomorfismos de grupos que están asociados de una manera natural con un semigrupo dado. Los resultados aquí expuestos constituyen la parte principal de la tesis doctoral del autor.

En la exposición se han empleado sólo unas cuantas proposiciones elementales de la teoría general de los semigrupos, y para facilitar la tarea del lector se ha incluído una primera parte en la cual éstas se enuncian, omitiendo sus demostraciones ya que se encuentran en el libro de Clifford y Preston citado en la bibliografía, así como en cualquier otro texto sobre la teoría general de los semigrupos.

En la Parte II se introducen los grupos de Schützenberger. La presentación aquí dada difiere de la dada en la referencia, razón por la cual se han incluído todas las demostraciones. Estos grupos se encuentran asociados con todo semigrupo. La construcción de los grupos aquí introducidos se lleva a cabo mediante un proceso bastante similar al de la construcción de los grupos de Schützenberger.

El trabajo del autor comienza pues en la Parte III. Se demuestra que, asociados con ciertas ternas de elementos de un semigrupo dado, existen dos grupos, así como un homomorfismo del primero de éstos sobre el segundo. Se demuestra que en ciertos casos particulares, estos grupos se reducen a los grupos de Schützenberger. Se estudian ciertas propiedades del semigrupo dado que implican que el homomorfismo anterior sea un isomorfismo. Finalmente, se demuestra que estas propiedades del semigrupo dado están, en ciertos casos particulares, implicadas por el hecho de que dicho homomorfismo sea un isomorfismo.

En la Parte IV se considera un homomorfismo de un semigrupo sobre otro semigrupo. Se demuestra entonces que este homomorfismo induce homomorfismos entre los grupos introducidos en la Parte III, formando diagramas conmutativos. Algunos de los resultados de esta parte se demuestran bajo la condición de que los semigrupos en cuestión contengan elemento identidad.

En la Parte V se consideran casos particulares. Todos los resultados de esta parte son consecuencias evidentes de las proposiciones de la Parte III.

Los grupos de Schützenberger se han aplicado en la teoría de las representaciones de los semigrupos. Cabe pues considerar las posibles aplicaciones en dicha teoría de los grupos aquí introducidos, lo cual no se ha hecho en este trabajo. Igualmente se han dejado de lado consideraciones topológicas.

En conclusión, el autor desea expresar su más profundo agradecimiento a los profesores Robert P. Hunter y Lee W. Anderson, cuyas sugestiones fueron de gran valor.

I. Preliminares

El propósito de esta parte es introducir las definiciones y resultados básicos que se usarán posteriormente.

El par ordenado $(S, \circ)$ es llamado un *semigrupo* si y solamente si S es un conjunto no vacío y $\circ$ es una operación binaria asociativa en S; en otras palabras, $\circ$ es una función que a cada par ordenado (x, y) de elementos de S asigna un elemento de S, que se denota $x \circ y$, de tal modo que la relación

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

sea satisfecha cualesquiera que sean x, y y z en S. Un subconjunto no vacío A de S se llama un *subsemigrupo de* S si y solamente si $x \circ y \in A$ para todo par (x, y) de elementos de A; es entonces evidente que $(A, \times)$ es un semigrupo, donde $\times$ denota la restricción de $\circ$ al conjunto de los pares (x, y) tales que $x \in A$ e $y \in A$. Cuando no haya posibilidad de confusión, la operación en un semigrupo se escribe de manera multiplicativa, es decir xy en lugar de $x \circ y$, y se dice simplemente que "S es un semigrupo."

Un elemento e de un semigrupo S se llama un *elemento identidad de* S si y solamente si $ex = x = xe$ para todo elemento x de S. Es claro que un semigrupo no puede contener más de un elemento identidad.

Sea S un semigrupo. Dados un elemento x de S y un subconjunto A de S, subconjuntos xA y Ax de S se definen por

$$xA = \{xa \mid a \in A\} \quad \text{y} \quad Ax = \{ax \mid a \in A\}.$$

Considérense ahora las siguientes relaciones, definidas en un semigrupo S:

$$\{(x, y) \mid x \in S, y \in S, \{x\} \cup xS = \{y\} \cup yS\},$$

$$\{(x, y) \mid x \in S, y \in S, \{x\} \cup Sx = \{y\} \cup Sy\},$$

$$\{(x, y) \mid x \in S, y \in S, \{x\} \cup xS = \{y\} \cup yS, \{x\} \cup Sx = \{y\} \cup Sy\};$$

es evidente que éstas son relaciones de equivalencia en S. Serán llamadas la *$\mathcal{R}$-equivalencia*, *$\mathcal{L}$-equivalencia*, y *$\mathcal{H}$-equivalencia de* S, respectivamente.

Como se verá en lo que sigue, es la $\mathcal{H}$-equivalencia la que desempeñará la parte más importante de este trabajo.

Proposición I.1: *Dados elementos x e y de un semigrupo S, se tiene: (i) x e y son $\mathcal{R}$-equivalentes si y solamente si $x = y$ o existen elementos a y b de S tales que $x = ya$ e $y = xb$; (ii) x e y son $\mathcal{L}$-equivalentes si y solamente si $x = y$ o existen elementos c y d de S tales que $x = cy$ e $y = dx$; (iii) x e y son $\mathcal{H}$-equivalentes si y solamente si $x = y$ o existen elementos p, q, r, y s de S tales que $x = py$, $x = yq$, $y = rx$ e $y = xs$.*

Esta proposición puede ser simplificada si S contiene un elemento identidad:

Proposición I.2: *Dados elementos x e y de un semigrupo S con elemento identidad, se tiene: (i) x e y son $\mathcal{R}$-equivalentes si y solamente si existen elementos a y b de S tales que $x = ya$ e $y = xb$; (ii) x e y son $\mathcal{L}$-equivalentes si y solamente si existen elementos c y d de S tales que $x = cy$ e $y = dx$; y (iii) x e y son $\mathcal{H}$-equivalentes si y solamente si existen elementos p, q, r, y s de S tales que $x = py$, $x = yq$, $y = rx$ e $y = xs$.*

Una relación de equivalencia $\mathcal{S}$ en un semigrupo S es llamada: (i) *compatible a la izquierda* si y solamente si $(x, y) \in \mathcal{S}$ y $z \in S$ implican $(zx, zy) \in \mathcal{S}$; (ii) *compatible a la derecha* si y solamente si $(x, y) \in \mathcal{S}$ y $z \in S$ implican $(xz, yz) \in \mathcal{S}$; (iii) una *congruencia* si y solamente si $\mathcal{S}$ es compatible a la izquierda y compatible a la derecha simultáneamente.

Proposición I.3: *La $\mathcal{R}$-equivalencia y la $\mathcal{L}$-equivalencia de todo semigrupo son, respectivamente, compatible a la izquierda y compatible a la derecha.*

Proposición I.4: *Si $\mathcal{S}$ es una congruencia en un semigrupo, y si $(x, y) \in \mathcal{S}$ y $(u, v) \in \mathcal{S}$, entonces $(xu, yv) \in \mathcal{S}$.*

Sea $\mathcal{S}$ una congruencia en un semigrupo S. Dadas $\mathcal{S}$-clases A y B de S, el conjunto $\{ab \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$ está, en virtud de la Proposición I.4, contenido en una $\mathcal{S}$-clase C de S; definiendo $AB = C$, una operación binaria es introducida en el conjunto de las $\mathcal{S}$-clases de S. Esta operación es evidentemente asociativa, de modo que el conjunto de las $\mathcal{S}$-clases de S es un semigrupo. Este semigrupo es llamado el *semigrupo cociente de S por $\mathcal{S}$*, y es comúnmente denotado por $S/\mathcal{S}$.

Sean S y T semigrupos. Se dice que α es un *homomorfismo de* $S \left\{\begin{matrix} en \\ sobre \end{matrix}\right\} T$ si y solamente si α es una función de $S \left\{\begin{matrix} \text{en} \\ \text{sobre} \end{matrix}\right\} T$ tal que

$$(xy)\alpha = (x\alpha)(y\alpha)$$

siempre que x e y sean elementos de S.

Sea $\mathcal{S}$ una congruencia en un semigrupo S. Es claro que la función que asigna a cada elemento x de S la $\mathcal{S}$-clase de S que contiene x es un homomorfismo de S sobre $S/\mathcal{S}$. Este homomorfismo es llamado el *homomorfismo natural de S sobre $S/\mathcal{S}$*.

Proposición I.5: *Si α es un homomorfismo de un semigrupo S sobre un semigrupo T, y si x e y son elementos (i) $\mathcal{R}$-equivalentes de S, entonces $x\alpha$ e $y\alpha$ son elementos $\mathcal{R}$-equivalentes de T; (ii) $\mathcal{L}$-equivalentes de S, entonces $x\alpha$ e $y\alpha$ son elementos $\mathcal{L}$-equivalentes de T; y (iii) $\mathcal{H}$-equivalentes de S, entonces $x\alpha$ e $y\alpha$ son elementos $\mathcal{H}$-equivalentes de T.*

Las dos proposiciones que se dan a continuación se conocen en la literatura como "los lemas de Green".

Proposición I.6: *Sean x e y elementos $\mathcal{R}$-equivalentes de un semigrupo S tales que $x \neq y$. Sean p y q elementos de S tales que $xp = y$ y $x = yq$. Sean L_x y L_y las $\mathcal{L}$-clases de S que contienen x e y, respectivamente. Sean α y β las funciones definidas por*

$$z\alpha = zp \quad si \quad z \in L_x, \quad y \qquad z\beta = zq \quad si \quad z \in L_y .$$

Se tiene entonces: (i) α es una función de L_x sobre L_y; (ii) β es una función de L_y sobre L_x; (iii) α y β son mutualmente inversas; (iv) si $z \in L_x$, entonces z y $z\alpha$ son $\mathcal{R}$-equivalentes; y (v) si $z \in L_y$, entonces z y $z\beta$ son $\mathcal{R}$-equivalentes.

Proposición I.7: *Sean x e y elementos $\mathcal{L}$-equivalentes de un semigrupo S tales que $x \neq y$. Sean r y s elementos de S tales que $rx = y$ y $sy = x$. Sean R_x y R_y las $\mathcal{R}$-clases de S que contienen x e y, respectivamente. Sean γ y δ las funciones definidas por*

$$z\gamma = rz \quad si \quad z \in R_x\,, \quad y \qquad z\delta = sz \quad si \quad z \in R_y\,.$$

Se tiene entonces: (i) γ es una función de R_x sobre R_y; (ii) δ es una función de R_y sobre R_x; (iii) γ y δ son mutualmente inversas; (iv) si $z \in R_x$, entonces z y $z\gamma$ son $\mathcal{L}$-equivalentes; y (v) si $z \in R_y$, entonces z y $z\delta$ son $\mathcal{L}$-equivalentes.

Proposición I.8: *Sea H una $\mathcal{H}$-clase de un semigrupo S, y sea R la $\mathcal{R}$-clase de S que contiene $\mathcal{H}$. Si $x \in S$ y si $Hx \frown R$ no es vacío, entonces Hx es una $\mathcal{H}$-clase de S.*

Proposición I.9: *Sea H una $\mathcal{H}$-clase de un semigrupo S, y sea L la $\mathcal{L}$-clase de S que contiene H. Si $x \in S$ y si $xH \frown L$ no es vacío, entonces xH es una $\mathcal{H}$-clase de S.*

Proposición I.10: *Si H es una $\mathcal{H}$-clase de un semigrupo S, y si x es un elemento de S tal que $H \frown Hx$ no es vacío, entonces $H = Hx$.*

Proposición I.11: *Si H es una $\mathcal{H}$-clase de un semigrupo S, y si x es un elemento de S tal que $H \frown xH$ no es vacío, entonces $H = xH$.*

II. Los grupos de Schützenberger

En esta parte se considera un semigrupo S. La $\mathcal{R}$-equivalencia, la $\mathcal{L}$-equivalencia y la $\mathcal{H}$-equivalencia de S son respectivamente denotadas por $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$. Dado un elemento x de S, la $\mathcal{R}$-clase, la $\mathcal{L}$-clase y la $\mathcal{H}$-clase de S que contienen x se denotan respectivamente por R_x, L_x y H_x.

Dados subconjuntos A y B de S, un subconjunto $A \mathrel{.\!\cdot} B$ de S se define por

$$A \mathrel{.\!\cdot} B = \{x \mid x \in S \text{ y } Bx \subseteq A\};$$

si $B = \{b\}$, donde $b \in S$, entonces se escribe simplemente $A \mathrel{.\!\cdot} b$ en lugar de $A \mathrel{.\!\cdot} \{b\}$.

Proposición II.1: *Si A es un subconjunto de S, entonces $A \mathrel{.\!\cdot} A$ es vacío o es un subsemigrupo de S.*

Demostración: Supóngase que $x \in A \mathrel{.\!\cdot} A$ e $y \in A \mathrel{.\!\cdot} A$. Entonces $A(xy) = (Ax)y \subseteq Ay \subseteq A$, de donde $xy \in A \mathrel{.\!\cdot} A$. l.q.q.d.

Proposición II.2: *Si $x \in S$, entonces $H_x \mathrel{.\!\cdot} x = \{t \mid t \in S \text{ y } H_xt = H_x\} = H_x \mathrel{.\!\cdot} H_x$.*

Demostración: Primeramente, sea $t \in H_x \mathrel{.\!\cdot} x$. Esto quiere decir que $xt \in H_x$, de donde $xt \in H_xt \frown H_x$. Se deduce entonces de la Proposición I.10 que $H_xt = H_x$.

Es claro que, si t es un elemento de S tal que $H_xt = H_x$, entonces $t \in H_x \mathrel{.\!\cdot} H_x$.

Finalmente, sea $t \in H_x \mathrel{.\!\cdot} H_x$. Dado que $x \in H_x$, se tiene que $xt \in H_xt \subseteq H_x$, de donde $t \in H_x \mathrel{.\!\cdot} x$. l.q.q.d.

Dado un elemento x de S, un conjunto $\mathcal{S}_x$ se define por

$$\mathcal{S}_x = \{(u, v) \mid u \in H_x \cdot\!\cdot\, x, v \in H_x \cdot\!\cdot\, x \text{ y } xu = xv\}.$$

Proposición II.3: *Si x, u y v son elementos de S tales que $xu = xv$, entonces $zu = zv$ para todo elemento z de Sx.*

Demostración: Esto es evidente, pues si $z = wx$, donde $w \in S$, se tiene que $zu = (wx)u = w(xu) = w(xv) = (wx)v = zv$. l.q.q.d.

Proposición II.4: *Si $x \in S$ y si $(u, v) \in \mathcal{S}_x$, entonces $zu = zv$ para todo elemento z de H_x.*

Demostración: Por hipótesis, $xu = xv$. Si $z \in H_x$ y $z \neq x$, entonces $z = wx$, donde $w \in S$, de modo que $z \in Sx$. Se deduce entonces de la Proposición II.3 que $zu = zv$. l.q.q.d.

Proposición II.5: *Si $x \in S$, $u \in H_x \cdot\!\cdot\, x$, $v \in H_x \cdot\!\cdot\, x$ y si existe un elemento y de H_x tal que $yu = yv$, entonces $(u, v) \in \mathcal{S}_x$.*

Demostración: Si $y = x$, entonces $xu = yu = yv = xv$; si $y \neq x$, entonces $x = wy$, donde $w \in S$, de modo que $xu = (wy)u = w(yu) = w(yv) = (wy)v = xv$. En todo caso se tiene que $xu = xv$, de donde $(u, v) \in \mathcal{S}_x$. l.q.q.d.

Proposición II.6: *Si $x \in S$ y $H_x \cdot\!\cdot\, x$ no es vacío, entonces $\mathcal{S}_x$ es una congruencia en el subsemigrupo $H_x \cdot\!\cdot\, x$ de S.*

Demostración: El hecho que $H_x \cdot\!\cdot\, x$ es un subsemigrupo de S es consecuencia inmediata de las Proposiciones II.1 y II.2.

Es también evidente que $\mathcal{S}_x$ es una relación de equivalencia en $H_x \cdot\!\cdot\, x$.

Finalmente, sean $(u, v) \in \mathcal{S}_x$ y $w \in H_x \cdot\!\cdot\, x$. Es inmediato que

$$x(uw) = (xu)w = (xv)w = x(vw),$$

de donde $(uw, vw) \in \mathcal{S}_x$; pero también, como $xw \in H_x$, se deduce de la Proposición II.4 que

$$x(wu) = (xw)u = (xw)v = x(wv),$$

de donde $(wu, wv) \in \mathcal{S}_x$. Se concluye así que $\mathcal{S}_x$ es una congruencia en $H_x \cdot\!\cdot\, x$. l.q.q.d.

La proposición a continuación da una condición suficiente para que $H_x \cdot\!\cdot\, x$ sea no vacío.

Proposición II.7: *Si $x \in S$ y $H_x \neq \{x\}$, entonces $H_x \cdot\!\cdot\, x$ no es vacío.*

Demostración: Sea z un elemento de H_x diferente de x. Entonces existe un elemento y de S tal que $xy = z$, de donde $y \in H_x \cdot\!\cdot\, x$. l.q.q.d.

Proposición II.8: *Si $x \in S$ y $H_x \cdot\!\cdot\, x$ no es vacío, entonces existe un elemento a de $H_x \cdot\!\cdot\, x$ tal que $x = xa$.*

Demostración: Sea $y \in H_x \cdot\!\cdot\, x$. En virtud de la Proposición II.2, se sabe que $H_x y = H_x$. Como $x \in H_x$, existe un elemento u de H_x tal que $x = uy$. Si $u = x$, entonces la conclusión queda establecida si se pone $a = y$; si $u \neq x$, entonces $u = xv$, donde $v \in S$, de donde $x = uy = (xv)y = x(vy)$, y la conclusión queda también establecida si se pone $a = vy$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN II.9. *Si $x \in S$ y $H_x \cdot\!\cdot\, x$ no es vacío, entonces $(H_x \cdot\!\cdot\, x)/\mathcal{S}_x$ es un grupo.*

Demostración: Sea a un elemento de $H_x \cdot\!\cdot\, x$ tal que $x = xa$, y sea A el elemento de $(H_x \cdot\!\cdot\, x)/\mathcal{S}_x$ que contiene a. Si $C \in (H_x \cdot\!\cdot\, x)/\mathcal{S}_x$ y $c \in C$, entonces $xc = (xa)c = x(ac)$, y como c y ac son elementos de $H_x \cdot\!\cdot\, x$, se concluye que $(c, ac) \in \mathcal{S}_x$, lo que implica que $C = AC$.

Finalmente, sea D un elemento de $(H_x \cdot\!\cdot\, x)/\mathcal{S}_x$ diferente de A, y sea $d \in D$. Como $d \in H_x \cdot\!\cdot\, x$, se deduce de la Proposición II.2 que $H_x d = H_x$. Dado que $x \in H_x$, se tiene $x = wd$, donde $w \in H_x$. No es posible que $w = x$, pues $w = x$ implicaría $xd = wd = x = xa$, de donde $(d, a) \in \mathcal{S}_x$, o sea $A = D$. Así, $w \neq x$, y por lo tanto $w = xc$, donde $c \in S$; es evidente que $c \in H_x \cdot\!\cdot\, x$, pues $xc = w \in H_x$. Luego $x = wd = (xc)d = x(cd)$, de donde $(a, cd) \in \mathcal{S}_x$, pues $xa = x = x(cd)$. Pero esto quiere decir que $A = CD$, donde C denota el elemento de $(H_x \cdot\!\cdot\, x)/\mathcal{S}_x$ que contiene c.

Se concluye entonces que $(H_x \cdot\!\cdot\, x)/\mathcal{S}_x$ es un grupo, y que A es su elemento identidad. l.q.q.d.

El par $(\{0\}, \circ)$, donde 0 es el número real cero y $\circ$ es la operación binaria en $\{0\}$ definida por $0 \circ 0 = 0$, se llama el *grupo trivial.* Es evidente que el grupo trivial es un grupo.

Dado un elemento x de S, un grupo Γ_x se define del modo siguiente: si $H_x \cdot\!\cdot\, x$ es vacío, entonces Γ_x es el grupo trivial; si $H_x \cdot\!\cdot\, x$ no es vacío, entonces Γ_x es el grupo $(H_x \cdot\!\cdot\, x)/\mathcal{S}_x$, y el homomorfismo natural de $H_x \cdot\!\cdot\, x$ sobre Γ_x se denota por π_x. El grupo Γ_x se llama el *grupo de Schützenberger de x.*

PROPOSICIÓN II.10: *Si $(x, y) \in \mathcal{L}$, entonces $H_x \cdot\!\cdot\, x = H_y \cdot\!\cdot\, y$ y $\mathcal{S}_x = \mathcal{S}_y$.*

Demostración: Esto es evidente si $x = y$. Supóngase que $x \neq y$, y sean u y v elementos de S tales que $x = uy$ e $y = vx$. Como $H_y \subseteq L_y = L_x$ y $x \in L_x \frown uH_y$, se deduce de la Proposición I.9 que $H_x = uH_y$. Como $H_x \subseteq L_x = L_y$ e $y \in L_y \frown vH_x$, se deduce también de la Proposición I.9 que $H_y = vH_x$.

Sea ahora $z \in H_x \cdot\!\cdot\, x$. Entonces $xz \in H_x$, de donde $yz = (vx)z = v(xz) \in vH_x = H_y$, y por lo tanto $z \in H_y \cdot\!\cdot\, y$. Se concluye que $H_x \cdot\!\cdot\, x \subseteq H_y \cdot\!\cdot\, y$. Se verifica de modo análogo que $H_y \cdot\!\cdot\, y \subseteq H_x \cdot\!\cdot\, x$. Se tiene pues que $H_x \cdot\!\cdot\, x = H_y \cdot\!\cdot\, y$.

Para terminar, sea $(r, s) \in \mathcal{S}_x$. Esto quiere decir que $r \in H_x \cdot\!\cdot\, x$, $s \in H_x \cdot\!\cdot\, x$ y $xr = xs$. De acuerdo con lo demostrado en el párrafo precedente, se tiene que $r \in H_y \cdot\!\cdot\, y$ y $s \in H_y \cdot\!\cdot\, y$. Pero también $yr = (vx)r = v(xr) = v(xs) = (vx)s = ys$, y por lo tanto $(r, s) \in \mathcal{S}_y$. Luego $\mathcal{S}_x \subseteq \mathcal{S}_y$. Se verifica de modo análogo que $\mathcal{S}_x \supseteq \mathcal{S}_y$. Se tiene así que $\mathcal{S}_x = \mathcal{S}_y$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN II.11: *Si* $(x, y) \in \mathcal{L}$, *entonces* $\Gamma_x = \Gamma_y$.

Demostración: En virtud de la Proposición II.10, $H_x \therefore x$ es vacío si y solamente si $H_y \therefore y$ es vacío. Luego, o bien Γ_x y Γ_y son ambos iguales al grupo trivial, o bien $\Gamma_x = (H_x \therefore x)/\mathcal{S}_x = (H_y \therefore y)/\mathcal{S}_y = \Gamma_y$. En todo caso, $\Gamma_x = \Gamma_y$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN II.12: *Si* $x \in S$ *y* H_x *es un grupo, entonces* $H_x \subseteq H_x \therefore x$ *y* $\pi_x \mid H_x$ *es un isomorfismo de* H_x *sobre* Γ_x.

Demostración: Dado que $x \in H_x$ *y* H_x es un grupo, es claro que $H_x = xH_x$, de donde $H_x \subseteq H_x \therefore x$.

Sean ahora u y v elementos de H_x tales que $u\pi_x = v\pi_x$. Como $H_x \subseteq H_x \therefore x$, se tiene que $(u, v) \in \mathcal{S}_x$, y por lo tanto $xu = xv$. Siendo H_x un grupo, esto último implica que $u = v$. Así, $\pi_x \mid H_x$ es biunívoca.

Sea finalmente $A \in \Gamma_x$, y sea $a \in A$. Dado que $a \in H_x \therefore x$, se tiene que $xa \in H_x = xH_x$, de donde $xa = xb$, siendo b un elemento de H_x. Así, $a \in H_x \therefore x$, $b \in H_x \subseteq H_x \therefore x$, y $xa = xb$, y se deduce que $(a, b) \in \mathcal{S}_x$. Luego $A = a\pi_x = b\pi_x$. Se concluye que $\pi_x \mid H_x$ aplica H_x sobre Γ_x. l.q.q.d.

III. Otros grupos asociados

Las notaciones y convenciones que se usan en esta parte son las mismas de la Parte II. Se consideran ahora elementos x, y y z de S tales que el conjunto $xH_y \frown H_z$ no es vacío.

PROPOSICIÓN III.1: $z \in Sy$.

Demostración: Sea $b \in xH_y \frown H_z$, y póngase $b = xu$, donde $u \in H_y$. Si $u = y$, entonces $b = xy$; si $u \neq y$, entonces existe un elemento v de S tal que $u = vy$, de donde $b = xu = x(vy) = (xv)y$. En todo caso se tiene que $b = cy$, siendo c un elemento de S. Si $b = z$, entonces $z = b = cy$; si $b \neq z$, entonces existe un elemento w de S tal que $z = wb$, de donde $z = wb = w(cy) = (wc)y$. En todo caso existe un elemento d de S tal que $z = dy$, y por lo tanto $z \in Sy$. l.q.q.d.

Subconjuntos $A[x, y, z]$ y $B[x, y, z]$ de S se definen por $A[x, y, z] = (H_z \therefore x) \frown H_y$ y $B[x, y, z] = xH_y \frown H_z$; la hipótesis inicial implica que $B[x, y, z]$ no es vacío.

PROPOSICIÓN III.2: $xA[x, y, z] = B[x, y, z]$, *y por lo tanto* $A[x, y, z]$ *no es vacío.*

Demostración: Sea, primeramente, $a \in A[x, y, z] = (H_z \therefore x) \frown H_y$. Entonces $xa \in H_z$ y $xa \in xH_y$, de donde $xa \in B[x, y, z]$.

Sea ahora $b \in B[x, y, z] = xH_y \frown H_z$. Entonces $b = xc$, donde $c \in H_y$. Como $xc = b \in H_z$, se tiene que $c \in H_z \therefore x$. Luego $c \in (H_z \therefore x) \frown H_y = A[x, y, z]$, de donde $b = xc \in xA[x, y, z]$. l.q.q.d.

Subconjuntos $C[x, y, z]$ y $D[x, y, z]$ de S se definen por $C[x, y, z] = A[x, y, z] \therefore A[x, y, z]$ y $D[x, y, z] = B[x, y, z] \therefore B[x, y, z]$.

PROPOSICIÓN III.3: $C[x, y, z] \subseteq D[x, y, z]$.

Demostración: Sea $t \in C[x, y, z] = A[x, y, z] \cdot\!\cdot A[x, y, z]$. Entonces, por la Proposición III.2, se tiene que $(B[x, y, z])t = (xA[x, y, z])t = x((A[x, y, z])t) \subseteq xA[x, y, z] = B[x, y, z]$, lo cual quiere decir que $t \in B[x, y, z] \cdot\!\cdot B[x, y, z] = D[x, y, z]$. l.q.q.d.

Esto demuestra, en particular, que $D[x, y, z]$ no es vacío si $C[x, y, z]$ no es vacío.

PROPOSICIÓN III.4: *$C[x, y, z]$ es vacío o es un subsemigrupo de $H_y \cdot\!\cdot y$.*

Demostración: Supóngase que $C[x, y, z]$ no es vacío. Es entonces claro, en virtud de la Proposición II.1, que $C[x, y, z]$ es un subsemigrupo de S.

Sea $a \in A[x, y, z] = (H_z \cdot\!\cdot x) \frown H_y$. Si $c \in C[x, y, z]$, se tiene que $ac \in A[x, y, z] \subseteq H_y$, de donde $ac \in H_yc \frown H_y$, y, en virtud de la Proposición I.10, se tiene que $H_yc = H_y$; así, $c \in H_y \cdot\!\cdot H_y = H_y \cdot\!\cdot y$. Luego $C[x, y, z] \subseteq H_y \cdot\!\cdot y$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN III.5: *$D[x, y, z]$ es vacío o es un subsemigrupo de $H_z \cdot\!\cdot z$.*

Demostración: Supóngase que $D[x, y, z]$ no es vacío. Es entonces claro, en virtud de la proposición II.1, que $D[x, y, z]$ es un subsemigrupo de S.

Sea $b \in B[x, y, z] = xH_y \frown H_z$. Si $d \in D[x, y, z]$, se tiene que $bd \subseteq\in B[x, y, z] \subseteq H_z$, de donde $bd \in H_zd \frown H_z$, y, en virtud de la Proposición I.10, se tiene que $H_zd = H_z$; así, $d \in H_z \cdot\!\cdot H_z = H_z \cdot\!\cdot z$. Luego $D[x, y, z] \subseteq H_z \cdot\!\cdot z$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN III.6: *Una condición necesaria y suficiente para que $C[x, y, z]$ no sea vacío es que $H_y \cdot\!\cdot y$ no sea vacío; en este caso $C[x, y, z]$ contiene todo elemento c de $H_y \cdot\!\cdot y$ tal que $yc = y$.*

Demostración: La condición es evidentemente necesaria, pues $C[x, y, z] \subseteq H_y \cdot\!\cdot y$.

Supóngase ahora que $H_y \cdot\!\cdot y$ no es vacío, y sea c un elemento de $H_y \cdot\!\cdot y$ tal que $yc = y$ (la existencia de c está asegurada por la Proposición II.8). Sea $a \in A[x, y, z] = (H_z \cdot\!\cdot x) \frown H_y$. Dado que $c \in H_y \cdot\!\cdot y$, se tiene que $ac \in H_yc = H_y$. Pero también $xa \in H_z$; por la Proposición III.1, se tiene $z = py$, siendo p un elemento de S, y por lo tanto $zc = (py)c = p(yc) = py = z$; si $xa = z$, entonces $x(ac) = (xa)c = zc = z \in H_z$; si $xa \neq z$, entonces $xa = wz$, donde $w \in S$, de donde $x(ac) = (xa)c = (wz)c = w(zc) = wz = xa \in H_z$. En todo caso se tiene que $x(ac) \in H_z$, de modo que $ac \in H_z \cdot\!\cdot x$. Así, $ac \in (H_z x) \frown H_y = A[x, y, z]$. Luego $c \in A[x, y, z] \cdot\!\cdot A[x, y, z] = C[x, y, z]$. l.q.q.d.

Conjuntos $\mathcal{R}[x, y, z]$ y $\mathcal{O}[x, y, z]$ se definen por

$$\mathcal{R}[x, y, z] = (C[x, y, z] \times C[x, y, z]) \frown \mathcal{S}_y, \quad \text{y}$$
$$\mathcal{O}[x, y, z] = (D[x, y, z] \times D[x, y, z]) \frown \mathcal{S}_z.$$

PROPOSICIÓN III.7: $\mathcal{R}[x, y, z] \subseteq \mathcal{O}\,[x, y, z]$.

Demostración: Sea $(u, v) \in \mathcal{R}[x, y, z]$. Se deduce inmediatamente de la Proposición III.2 que $(u, v) \in D[x, y, z] \times D[x, y, z]$. Como $(u, v) \in \mathcal{S}_y$, se tiene también que $yu = yv$. De las Proposisiones III.1 y II.3 se deduce que $zu = zv$. Luego $(u, v) \in \mathcal{S}_z$. Se tiene pues que $(u, v) \in \mathcal{O}[x, y, z]$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN III.8: *Si $C[x, y, z]$ no es vacío, entonces $\mathcal{R}[x, y, z]$ es una congruencia en $C[x, y, z]$.*

Demostración: Es evidente que $\mathcal{R}[x, y, z]$ es una relación de equivalencia en $C[x, y, z]$. Sean ahora $(u, v) \in \mathcal{R}[x, y, z]$ y $w \in C[x, y, z]$. Entonces uw, vw, wu, wv son elementos de $C[x, y, z]$, y como $\mathcal{S}_y$ es una congruencia en $H_y \cdot\!\cdot\ y$, se tiene también que $(uw, vw) \in \mathcal{S}_y$ y $(wu, wv) \in \mathcal{S}_y$. Así, $(uw, vw) \in \mathcal{R}[x, y, z]$ y $(wu, wv) \in \mathcal{R}[x, y, z]$. Se concluye entonces que $\mathcal{R}[x, y, z]$ es una congruencia en $C[x, y, z]$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN III.9: *Si $D[x, y, z]$ no es vacío, entonces $\mathcal{O}[x, y, z]$ es una congruencia en $D[x, y, z]$.*

Demostración: Es evidente que $\mathcal{O}[x, y, z]$ es una relación de equivalencia en $D[x, y, z]$. Sean ahora $(u, v) \in \mathcal{O}[x, y, z]$ y $w \in D[x, y, z]$. Entonces uw, vw, wu, wv son elementos de $D[x, y, z]$, y como $\mathcal{S}_z$ es una congruencia en $H_z \cdot\!\cdot\ z$, se tiene también que $(uw, vw) \in \mathcal{S}_z$ y $(wu, wv) \in \mathcal{S}_z$. Así, $(uw, vw) \in \mathcal{O}[x, y, z]$ y $(wu, wv) \in \mathcal{O}[x, y, z]$. Se concluye entonces que $\mathcal{O}[x, y, z]$ es una congruencia en $D[x, y, z]$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN III.10: *Si $C[x, y, z]$ no es vacío, entonces $C[x, y, z]/\mathcal{R}[x, y, z]$ y $D[x, y, z]/\mathcal{O}[x, y, z]$ son grupos.*

Demostración: Sea a un elemento de $H_y \cdot\!\cdot\ y$ tal que $y = ya$ (la existencia de a está asegurada por la Proposición II.9). En la demostración de la Proposición II.9 se vió que el elemento de $(H_y \cdot\!\cdot\ y)/\mathcal{S}_y$ que contiene a es el elemento identidad del grupo $(H_y \cdot\!\cdot\ y)/\mathcal{S}_y$; esto quiere decir que $(ca, c) \in \mathcal{S}_y$ y $(ac, c) \in \mathcal{S}_y$ para cada elemento c de $H_y \cdot\!\cdot\ y$. Teniéndose también, en virtud de la Proposición III.6, que $a \in C[x, y, z]$, se deduce que $(ca, c) \in \mathcal{R}[x, y, z]$ y $(ac, c) \in \mathcal{R}[x, y, z]$ para cada elemento c de $C[x, y, z]$. Denotando por A el elemento de $C[x, y, z]/\mathcal{R}[x, y, z]$ que contiene a, esto último quiere decir que $AC = C = CA$ para cada elemento C de $C[x, y, z]/\mathcal{R}[x, y, z]$.

Sea B un elemento de $C[x, y, z]/\mathcal{R}[x, y, z]$ diferente de A, y sea $b \in B$. Es claro que $b \in C[x, y, z]$, de donde $A[x, y, z]b \subseteq A[x, y, z]$. De acuerdo con la Proposición III.2, $A[x, y, z]$ no es vacío; sea pues $t \in A[x, y, z] = (H_z \cdot\!\cdot\ x) \frown H_y$. Entonces $tb \in (H \cdot\!\cdot\ x) \frown H_y$. Como $tb \in H_y$ y $t \in H_y$, se tiene que $H_y = H_t$ y $tb \in H_t$. No es posible que $tb = t$, pues en caso contrario, como $t \in H_y$, se tendría $t = y$ ó $rt = y$ para algún elemento r de S, de donde $yb = tb = t = y$ ó $yb = (rt)b = r(tb) = rt = y$, y así, en todo caso, $yb = y = ya$, implicando que $(b, a) \in \mathcal{R}[x, y, z]$, contrario a la suposición que $B \neq A$. Luego $tb \neq t$, y se deduce que existe un elemento c de S tal que $(tb)c = t$; es evidente que $c \in H_y \cdot\!\cdot\ y$, pues $(tb)c \in H_tc \frown H_t$, de donde $H_yc = H_tc = H_t = H_y$. Dado que $xt = x((tb)c) = (x(tb))c \in H_zc$, se deduce que $xt \in H_z \frown H_zc$, y por lo tanto $H_z = H_zc$. Si $u \in A[x, y, z] = (H_z \cdot\!\cdot\ x) \frown H_y$, entonces $x(uc) = (xu)c \in H_zc = H_z$ y $uc \in$

$H_y c = H_y$, de donde se deduce que $uc \in (H_z \mathbin{.\!\cdot} x) \frown H_y = A[x, y, z]$. Luego $c \in A[x, y, z] \mathbin{.\!\cdot} A[x, y, z] = C[x, y, z]$. Ahora bien, como $t \in H_y$ y $t(bc) = (tb)c = t$, se ve que $y(bc) = y$, pues siendo $y = t$ ó $y = st$ para algún elemento s de S, se tiene que $y(bc) = t(bc) = t = y$ ó $y(bc) = (st)(bc) = s(t(bc)) = st = y$. Luego $y(bc) = y = ya$, implicando que $(bc, a) \in \mathfrak{R}[x, y, z]$. Luego, denotando por C el elemento de $C[x, y, z]/\mathfrak{R}[x, y, z]$ que contiene c, se tiene que $BC = A$. Se concluye por lo tanto que $C[x, y, z]/\mathfrak{R}[x, y, z]$ es un grupo.

Dado que $C[x, y, z] \subseteq D[x, y, z]$, se deduce que $a \in D[x, y, z]$. En virtud de la Proposición III.1, se sabe que $z = sy$, donde $s \in S$, y por lo tanto $za = (sy)a = s(ya) = sy = z$. Como ya se vió en la demostración de la Proposición II.9, el elemento de $(H_z \mathbin{.\!\cdot} z)/\mathfrak{S}_z$ que contiene a es el elemento identidad del grupo $(H_z \mathbin{.\!\cdot} z)/\mathfrak{S}_z$; esto quiere decir que $(da, d) \in \mathfrak{S}_z$ y $(ad, d) \in \mathfrak{S}_z$ para cada elemento d de $H_z \mathbin{.\!\cdot} z$. Se deduce inmediatamente de esto que $(da, d) \in \mathfrak{O}[x, y, z]$ y $(ad, d) \in \mathfrak{O}[x, y, z]$ para cada elemento d de $D[x, y, z]$. Denotando por E el elemento de $D[x, y, z]/\mathfrak{O}[x, y, z]$ que contiene a, esto último quiere decir que $EF = F = FE$ para cada elemento F de $D[x, y, z]/\mathfrak{O}[x, y, z]$.

Sea V un elemento de $D[x, y, z]/\mathfrak{O}[x, y, z]$ diferente de E, y sea $v \in V$. Es evidente que $v \in D[x, y, z]$, y por lo tanto $B[x, y, z]v \subseteq B[x, y, z]$. Sea $t \in B[x, y, z] = xH_y \frown H_z$. Se tiene, evidentemente, que $tv \in xH_y \frown H_z$. Siendo $t \in xH_y$, existe un elemento h de H_y tal que $t = xh$. De modo análogo, siendo $tv \in xH_y$, existe un elemento g de H_y tal que $tv = xg$. Es pues claro que $(g, h) \in \mathfrak{K}$. Si $g = h$, entonces $t = xh = xg = tv$; esto implicaría que $z = zv$, puesto que ó bien $t = z$ ó bien $z = wt$ para algún elemento w de S, y por lo tanto se tendría que $z = t = tv = zv$ ó $z = wt = w(tv) = (wt)v = zv$; luego $zv = z = za$, implicando que $(v, a) \in \mathfrak{O}[x, y, z]$, en contradicción con la suposición que $V \neq E$. Se tiene entonces que $g \neq h$, y por lo tanto existen elementos p y q de S tales que $g = hp$ y $h = gq$; es claro que $p \in H_y \mathbin{.\!\cdot} y$ y $q \in H_y \mathbin{.\!\cdot} y$, dado que $h \in H_y$, $g \in H_y$, $hp = g \in H_y$, y $gq = h \in H_y$. Ahora bien, $(tv)q = (xg)q = x(gq) = xh = t$, de modo que $t = (tv)q \in H_z q$. Resulta así que $t \in H_z q \frown H_z$, y por lo tanto $H_z q = H_z$. Si $r \in B[x, y, z] = xH_y \frown H_z$, entonces $rq \in (xH_y)q = x(H_y q) = xH_y$ y $rq \in H_z q = H_z$, de donde $rq \in B[x, y, z]$; se concluye que $q \in B[x, y, z] \mathbin{.\!\cdot} B[x, y, z] = D[x, y, z]$. Así, $t = (tv)q = t(vq)$; siendo $t \in H_z$, se tiene $t = z$ ó $z = wt$ para algún elemento w de S, de donde $z(vq) = t(vq) = zt = z$ ó $z(vq) = (wt)(vq) = w(t(vq)) = wt = z$. Se tiene pues que $z(vq) = z = za$. Denotando por Q el elemento de $D[x, y, z]/\mathfrak{O}[x, y, z]$ que contiene q, se tiene que $VQ = A$. Se concluye así que $D[x, y, z]/\mathfrak{O}[x, y, z]$ es también un grupo. l.q.q.d.

Grupos $\Gamma_1[x, y, z]$ y $\Gamma_2[x, y, z]$ se definen del modo siguiente: si $H_y \mathbin{.\!\cdot} y$ es vacío, y por lo tanto $C[x, y, z]$ es también vacío, entonces $\Gamma_1[x, y, z]$ y $\Gamma_2[x, y, z]$ son iguales al grupo trivial; si $H_y \mathbin{.\!\cdot} y$ no es vacío, y por lo tanto $C[x, y, z]$ no es tampoco vacío, $\Gamma_1[x, y, z]$ y $\Gamma_2[x, y, z]$ son, respectivamente, los grupos $C[x, y, z]/\mathfrak{R}[x, y, z]$ y $D[x, y, z]/\mathfrak{O}[x, y, z]$, y los homomorfismos naturales de $C[x, y, z]$ sobre $\Gamma_1[x, y, z]$ y de $D[x, y, z]$ sobre $\Gamma_2[x, y, z]$ son, respectivamente, denotados por $\sigma[x, y, z]$ y $\tau[x, y, z]$; el homomorfismo inclusión de $C[x, y, z]$ en $D[x, y, z]$ se denota por $\delta[x, y, z]$.

PROPOSICIÓN III.11: *Si $H_y \therefore y$ no es vacío, entonces existe un homomorfismo de $\Gamma_1[x, y, z]$ sobre $\Gamma_2[x, y, z]$, que se denotará por $\gamma[x, y, z]$, tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C[x,y,z] & \xrightarrow{\delta[x,y,z]} & D[x,y,z] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma[x,y,z]} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau[x,y,z]} \\ \Gamma_1[x,y,z] & \xrightarrow{\gamma[x,y,z]} & \Gamma_2[x,y,z] \end{array}$$

es commutativo.

Demostración: En virtud de la Proposición III.7, la correspondencia que asigna a cada elemento de $\Gamma_1[x, y, z]$ el elemento de $\Gamma_2[x, y, z]$ que contiene un elemento del primero define una función de $\Gamma_1[x, y, z]$ en $\Gamma_2[x, y, z]$, que será denotada por $\gamma[x, y, z]$. Es evidente, de esta definición, que $\gamma[x, y, z]$ es un homomorfismo de $\Gamma_1[x, y, z]$ en $\Gamma_2[x, y, z]$ y que el diagrama de la conclusión es commutativo. Como en la demostración de la proposición previa, se denotará por a un elemento de $H_y \therefore y$ tal que $y = ya$; se vió ya que $za = a$ y también que $a \in C[x, y, z]$.

Sea pues T un elemento de $\Gamma_2[x, y, z]$, y sea $t \in T$. Es claro que $t \in D[x, y, z] = B[x, y, z] \therefore B[x, y, z]$. Sea $b \in B[x, y, z]$; entonces $bt \in B[x, y, z]$, de donde $b \in xH_y \frown H_z$ y $bt \in xH_y \frown H_z$. Sean g y h elementos de H_y tales que $b = xh$ y $bt = xg$; es evidente que $(g, h) \in \mathcal{K}$. Supóngase primeramente que $h = g$. Entonces $bt = xg = xh = b$; siendo $b \in H_z$, se deduce fácilmente de $bt = b$ que $zt = z$. Luego $za = z = zt$, y se tiene que $(a, t) \in \mathcal{O}[x, y, z]$. Así, si A denota el elemento de $\Gamma_1[x, y, z]$ que contiene a, se ve que $T = A\,\gamma[x, y, z]$. Finalmente, supóngase que $h \neq g$. Entonces existe un elemento w de S tal que $g = hw$, y es claro que $w \in H_y \therefore y$. De $bt = xg = x(hw) = (xh)w = bw$ se deduce que $bt \in H_z \frown H_zw$ y por lo tanto que $H_zw = H_z$. Ahora bien, si $u \in A[x, y, z] = (H_z \therefore x) \frown H_y$, entonces $xu \in H_z$ y $u \in H_y$, de donde $x(uw) = (xu)w \in H_zw = H_z$ y $uw \in H_yw = H_y$, así que se tiene $uw \in (H_z \therefore x) \frown H_y = A[x, y, z]$. Luego $w \in C[x, y, z]$, y como $bt = bw$ y $b \in H_z$, se deduce que $zt = zw$ y por lo tanto que $(t, w) \in \mathcal{O}[x, y, z]$. Así, si W denota el elemento de $\Gamma_1[x, y, z]$ que contiene w, se ve que $T = W\,\gamma[x, y, z]$. En todo caso se tiene pues que T es la imagen de algún elemento de $\Gamma_1[x, y, z]$ por el homomorfismo $\gamma[x, y, z]$. Se concluye que $\gamma[x, y, z]$ es un homomorfismo de $\Gamma_1[x, y, z]$ sobre $\Gamma_2[x, y, z]$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN III.12: *Si $xH_y \subseteq H_z$, entonces $C[x, y, z] = H_y \therefore y$, $\mathcal{R}[x, y, z] = \mathcal{S}_y$ y $\Gamma_1[x, y, z] = \Gamma_y$.*

Demostración: La hipótesis que $xH_y \subseteq H_z$ es equivalente a la condición $H_y \subseteq H_z \therefore x$. Se tiene entonces que $A[x, y, z] = (H_z \therefore x) \frown H_y = H_y$, de donde $C[x, y, z] = H_y \therefore H_y = H_y \therefore y$. El resto de la conclusión es consecuencia evidente de esto último. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN III.13: *Si* $H_z \subseteq xH_y$, *entonces* $D[x, y, z] = H_z \mathrel{.\!\cdot} z$, $\mathcal{O}[x, y, z] = \mathcal{S}_z$ *y* $\Gamma_2[x, y, z] = \Gamma_z$.

Demostración: Por hipótesis, $B[x, y, z] = xH_y \frown H_z = H_z$. Se tiene entonces que $D[x, y, z] = H_z \mathrel{.\!\cdot} H_z = H_z \mathrel{.\!\cdot} z$. El resto de la conclusión es consecuencia immediata de esto. l.q.q.d.

Un elemento u de S es llamado *cancelativo a la izquierda sobre un subconjunto* K *de* S si y solamente si la condición siguiente es satisfecha: si $v \in K$, $w \in K$ y $uw = uv$, entonces $w = v$.

PROPOSICIÓN III.14: *Si* $H_y \mathrel{.\!\cdot} y$ *no es vacío, si* $z \in xH_y$, *y si* x *es cancelativo a la izquierda sobre* H_y, *entonces* $\gamma[x, y, z]$ *es biunívoca.*

Demostración: Sean V y W elementos de $\Gamma_1[x, y, z]$ tales que $V\gamma[x, y, z] = W\gamma[x, y, z]$, y sean $v \in V$ y $w \in W$. Se deduce de la definición de $\gamma[x, y, z]$ que $(u, w) \in \mathcal{O}[x, y, z]$, de donde $zv = zw$. Dado que $z \in xH_y$, se tiene $z = xu$, donde $u \in H_y$. Dado que $x(uv) = (xu)v = zv = zw = (xu)w = x(uw)$, así como que $uv \in H_y$ y $uw \in H_y$, la hipótesis implica que $uv = uw$. Se deduce ahora de la Proposición II.5 que $(v, w) \in \mathcal{S}_y$. Luego $(v, w) \in \mathcal{R}[x, y, z]$, lo cual quiere decir que $V = W$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN III.15: *Si* S *tiene elemento identidad (y por lo tanto* $C[x, y, z]$ *no es vacío), si* $xH_y \subseteq H_z$, *y si* $\gamma[x, y, z]$ *es biunívoca, entonces* x *es cancelativo a la izquierda sobre* H_y.

Demostración: Sean v y w elementos de H_y tales que $xv = xw$. Dado que S contiene elemento identidad, existen elementos b y d de S tales que $v = yb$ y $w = yd$; es claro que $b \in H_y \mathrel{.\!\cdot} y$ y $d \in H_y \mathrel{.\!\cdot} y$. En virtud de la Proposición III.12, se tiene entonces que $b \in C[x, y, z]$ y $d \in C[x, y, z]$. Sean B y D los elementos de $\Gamma_1[x, y, z]$ que contienen respectivamente b y d. Dado que $(xy)b = x(yb) = xv = xw = x(yd) = (xy)d$ y $xy \in xH_y \subseteq H_z$, se deduce de la Proposición II.5 que $(b, d) \in \mathcal{O}[x, y, z]$, o sea $B\gamma[x, y, z] = D\gamma[x, y, z]$. Siendo $\gamma[x, y, z]$ biunívoca, se deduce que $B = D$, o sea $(b, d) \in \mathcal{R}[x, y, z]$. Entonces $v = yb = yd = w$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN III.16: *Si* x *es cancelativo a la izquierda sobre* S, *entonces* $C[x, y, z] = D[x, y, z]$.

Demostración: Sea $d \in D[x, y, z] = B[x, y, z] \mathrel{.\!\cdot} B[x, y, z]$. Entonces, en virtud de la Proposición III.2, se tiene que $x(A[x, y, z]d) = (xA[x, y, z])d = B[x, y, z]d \subseteq B[x, y, z] = xA[x, y, z]$. Se deduce inmediatamente de la hipótesis que $A[x, y, z]d \subseteq A[x, y, z]$, o sea $d \in A[x, y, z] \mathrel{.\!\cdot} A[x, y, z] = C[x, y, z]$. Así $D[x, y, z] \subseteq C[x, y, z]$; entonces, por la Proposición III.3, $C[x, y, z] = D[x, y, z]$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN III.17: *Si* x *es cancelativo a la izquierda sobre* S, *y si* $z \in xH_y$, *entonces* $\mathcal{R}[x, y, z] = \mathcal{O}[x, y, z]$.

Demostración: Sea $(u, v) \in \mathcal{O}[x, y, z]$. En virtud de las Proposiciones III.16 y III.12, se tiene que $(u, v) \in C[x, y, z] \times C[x, y, z] = (H_y \mathrel{.\!\cdot} y) \times (H_y \mathrel{.\!\cdot} y)$.

Como $(u, v) \in \mathcal{S}_z$, se tiene además que $zu = zv$. Por hipótesis, existe un elemento w de H_y tal que $z = xw$. Luego $x(wu) = (xw)u = zu = zv = (xw)v = x(wv)$, y en virtud de la propiedad cancelativa de x, se ve que $wu = wv$. Usando las Proposiciones II.5 y III.12 se ve también que $(u, v) \in \mathcal{S}_y = \mathcal{R}[x, y, z]$. Así, $\mathcal{O}[x, y, z] \subseteq \mathcal{R}[x, y, z]$; entonces, por la Proposición III.7, $\mathcal{R}[x, y, z] = \mathcal{O}[x, y, z]$. l.q.q.d.

Proposición III.18: *Si $H_y \cdot\!\cdot\, y$ no es vacío, si $z \in xH_y$, y si x es cancelativo a la izquierda sobre S, entonces $C[x, y, z] = D[x, y, z]$, $\mathcal{R}[x, y, z] = \mathcal{O}[x, y, z]$, $\Gamma_1[x, y, z] = \Gamma_2[x, y, z]$, y $\gamma[x, y, z]$ es el isomorfismo identidad.*

Demostración: Esto no es más que la combinación de las tres últimas proposiciones y de la definición de $\gamma[x, y, z]$.

IV. Caso de un homomorfismo

En esta parte se considera un homomorfismo φ de un semigrupo S sobre un semigrupo S'. Se emplean las notaciones de las Partes II y III; los conceptos introducidos en éstas correspondientes a S' se distinguen de sus análogos en S por medio de una prima.

Proposición IV.1: *Si $x \in S$, entonces $[H_x]\varphi \subseteq H_{x\varphi}'$.*

Demostración: Esto resulta inmediatamente de la Proposición I.5.

Proposición IV.2: *Si x, y, z son elementos de S tales que $xH_y \frown H_z$ no es vacío, entonces $(x\varphi)H_{y\varphi}' \frown H_{z\varphi}'$ tampoco es vacío.*

Demostración: Sea $t \in xH_y \frown H_z$. Dado que $t \in xH_y$, se tiene que $t\varphi \in [xH_y]\varphi = (x\varphi)([H_y]\varphi) \subseteq (x\varphi)H_{y\varphi}'$; dado que $t \in H_z$, se tiene también que $t\varphi \in [H_z]\varphi \subseteq H_{z\varphi}'$. Así, $t\varphi \in (x\varphi)H_{y\varphi}' \frown H_{z\varphi}'$, implicando evidentemente la conclusión. l.q.q.d.

En lo que sigue x, y, z denotan elementos de S tales que $xH_y \frown H_z$ no es vacío.

Proposición IV.3: $[A[x, y, z]]\varphi \subseteq A'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$.

Demostración: Sea $t \in A[x, y, z] = (H_z \cdot\!\cdot\, x) \frown H_y$. Dado que $xt \in H_z$, se tiene que $(x\varphi)(t\varphi) = (xt)\varphi \in [H_z]\varphi \subseteq H_{z\varphi}'$, de donde $t\varphi \in H_{z\varphi}' \cdot\!\cdot\, x\varphi$. Dado que $t \in H_y$, se tiene también que $t\varphi \in [H_y]\varphi \subseteq H_{y\varphi}'$. Luego $t\varphi \in (H_{z\varphi}' \cdot\!\cdot\, x\varphi) \frown H_{z\varphi}' = A'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. l.q.q.d.

Proposición IV.4: $[B[x, y, z]]\varphi \subseteq B'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$.

Demostración: Sea $t \in B[x, y, z] = xH_y \frown H_z$. Entonces, como en la demostración de la Proposición IV.2, se tiene que $t\varphi \in (x\varphi)H_{y\varphi}' \frown H_{z\varphi}' = B'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. l.q.q.d.

Proposición IV.5: $[C[x, y, z]]\varphi \subseteq C'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$.

Demostración: Sea $t \in C[x, y, z] = A[x, y, z] \cdot\!\cdot\, A[x, y, z]$. Siendo $t \in H_y \cdot\!\cdot\, y$, se deduce sin dificultad que $t\varphi \in H_{y\varphi}' \cdot\!\cdot\, y\varphi$. Sea ahora $s \in A[x, y, z]$; como t

$\in C[x, y, z]$ se tiene que $st \in A[x, y, z] = (H_z \therefore x) \frown H_y$, de modo que $x(st) \in H_z$ y $st \in H_y$. Entonces, evidentemente, $((x\varphi)(s\varphi))(t\varphi) \in H_z\varphi'$. Dado que $xs \in H_z$, se tiene también que $(x\varphi)(s\varphi) \in H_{z\varphi}'$. Así, $((x\varphi)(s\varphi))(t\varphi) \in (H_{z\varphi}')(t\varphi) \frown H_{z\varphi}'$, y por lo tanto $(H_{z\varphi}')(t\varphi) = H_{z\varphi}'$.

Finalmente, sea $u \in A'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] = (H_{z\varphi}' \therefore x\varphi) \frown H_{y\varphi}'$. Como $(x\varphi)u \in H_{z\varphi}'$ y $u \in H_{y\varphi}'$, se deduce que $(x\varphi)(u(t\varphi)) = ((x\varphi)u)(t\varphi) \in (H_{z\varphi}')(t\varphi) = H_{z\varphi}'$ y $u(t\varphi) \in (H_{y\varphi}')(t\varphi) = H_{y\varphi}'$, esto último siendo consecuencia del hecho que $t\varphi \in H_{y\varphi}' \therefore y\varphi$. Se ve entonces que $u(t\varphi) \in (H_{z\varphi}' \therefore x\varphi) \frown H_{y\varphi}' = A'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. Luego $t\varphi \in C'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. l.q.q.d.

Proposición IV.6: *Si S contiene elemento identidad, entonces* $[D[x, y, z]]\varphi \subseteq D'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$.

Demostración: Sea $t \in D[x, y, z] = B[x, y, z] \therefore B[x, y, z]$. Siendo $t \in H_z \therefore z$, se deduce fácilmente que $t\varphi \in H_{z\varphi}' \therefore z\varphi$. Sea ahora $s \in B[x, y, z]$; entonces $st \in B[x, y, z]$. Luego $s \in xH_y$, $st \in xH_y$, $s \in H_z$ y $st \in H_z$. Póngase $s = xa$ y $st = xb$, siendo a y b elementos de H_y. Como S contiene elemento identidad, es posible escribir $b = ac$, donde $c \in S$. Es claro que $c \in H_y \therefore y$, y también que $st = xb = x(ac) = (xa)c = sc$. Se deduce entonces que $(s\varphi)(t\varphi) = (s\varphi)(c\varphi) \in ([H_z]\varphi)(c\varphi) \subseteq (H_{z\varphi}')(c\varphi)$ así como que $(s\varphi)(t\varphi) \in ([H_z]\varphi)(t\varphi) \subseteq (H_{z\varphi}')(t\varphi) = H_{z\varphi}'$, esto último es consecuencia de que $t\varphi \in H_z\varphi' \therefore z\varphi$. Luego $(s\varphi)(t\varphi) \in H_{z\varphi}' \frown (H_{z\varphi}')(c\varphi)$, de donde $H_{z\varphi}' = (H_{z\varphi}')(c\varphi)$, o sea $c\varphi \in H_{z\varphi}' \therefore z\varphi$. Así, $t\varphi$ y $s\varphi$ son elementos de $H_{z\varphi} \therefore z\varphi$ tales que $(s\varphi)(t\varphi) = (s\varphi)(c\varphi)$. Siendo $s\varphi \in [H_z]\varphi \subseteq H_{z\varphi}'$, se deduce fácilmente de esto último que $w(t\varphi) = w(c\varphi)$ para cada elemento w *de* $H_{z\varphi}'$.

Finalmente, sea $u \in B'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] = (x\varphi)H_{y\varphi}' \frown H_{z\varphi}'$. Como $u \in H_{z\varphi}'$ se tiene que $u(t\varphi) = u(c\varphi)$, y también que $u(t\varphi) \in (H_{z\varphi}')(t\varphi) = H_{z\varphi}'$, puesto que $t\varphi \in H_{z\varphi}' \therefore z\varphi$. Dado que $ac = b$, $a \in H_y$, y $b \in H_y$, se deduce que $(a\varphi)(c\varphi) = b\varphi$, $a\varphi \in [H_y]\varphi \subseteq H_{y\varphi}'$, y $b\varphi \in [H_y]\varphi \subseteq H_{y\varphi}'$, resultando entonces que $(H_{y\varphi}')(c\varphi) \frown H_{y\varphi}$ no es vacío; luego $(H_{y\varphi}')(c\varphi) = H_{y\varphi}'$. Entonces $u(t\varphi) = u(c\varphi) \in ((x\varphi)H_{y\varphi}')(c\varphi) = (x\varphi)((H_{y\varphi}')(c\varphi)) = (x\varphi)H_{y\varphi}'$. Así, $u(t\varphi) \in (x\varphi)H_{y\varphi}' \frown H_{z\varphi}' = B'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. Luego $t\varphi \in B'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] \therefore B'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] = D'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. l.q.q.d.

Proposición IV.7: *Si* $(u, v) \in \mathcal{R}[x, y, z]$, *entonces* $(u\varphi, v\varphi) \in \mathcal{R}'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$.

Demostración: Como $(u, v) \in C[x, y, z] \times C[x, y, z]$, se deduce inmediatamente de la Proposición IV.5 que $(u\varphi, v\varphi) \in C'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] \times C'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. Como $(u, v) \in \mathcal{S}_y$, se tiene que $yu = yv$, de donde $(y\varphi)(u\varphi) = (y\varphi)(v\varphi)$, implicando así que $(u\varphi, v\varphi) \in \mathcal{R}'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. l.q.q.d.

Proposición IV.8: *Si S contiene elemento identidad y si* $(u, v) \in \mathcal{O}[x, y, z]$, *entonces* $(u\varphi, v\varphi) \in \mathcal{O}'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$.

Demostración: Como $(u, v) \in D[x, y, z] \times D[x, y, z]$, se deduce inmediatamente de la Proposición IV.6 que $(u\varphi, v\varphi) \in D'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] \times D'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. Como $(u, v) \in \mathcal{S}_z$, se tiene que $zu = zv$, de donde $(z\varphi)(u\varphi) = (z\varphi)(v\varphi)$, implicando así que $(u\varphi, v\varphi) \in \mathcal{O}'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. l.q.q.d.

Proposición IV.9: *Si* $C[x, y, z]$ *no es vacío, y si* $\varphi_1[x, y, z]$ *denota la restricción de* φ *a* $C[x, y, z]$, *entonces existe un homomorfismo* $\varphi^1[x, y, z]$ *de* $\Gamma_1[x, y, z]$ *en* $\Gamma_1'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$ *tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C[x,y,z] & \xrightarrow{\varphi_1[x,y,z]} & C'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] \\ \sigma[x,y,z]\Big\downarrow & & \Big\downarrow \sigma'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] \\ \Gamma_1[x,y,z] & \xrightarrow{\varphi^1[x,y,z]} & \Gamma_1'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: De acuerdo con las Proposiciones IV.5 y IV.7, la correspondencia que asigna a cada elemento de $\Gamma_1[x, y, z]$ el elemento de $\Gamma_1'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$ que contiene la imagen por φ de un elemento del primero define una función $\varphi^1[x, y, z]$ de $\Gamma_1[x, y, z]$ en $\Gamma_1'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. Es claro, de esta definición, que $\varphi^1[x, y, z]$ satisface todas las condiciones indicadas en la conclusión. l.q.q.d.

Proposición IV.10: *Si* S *contiene elemento identidad (luego* $D[x, y, z]$ *no es vacío) y si* $\varphi_2[x, y, z]$ *denota la restricción de* φ *a* $D[x, y, z]$, *entonces existe un homomorfismo* $\varphi^2[x, y, z]$ *de* $\Gamma_2[x, y, z]$ *en* $\Gamma_2'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$ *tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} D[x,y,z] & \xrightarrow{\varphi_2[x,y,z]} & D'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] \\ \tau[x,y,z]\Big\downarrow & & \Big\downarrow \tau'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] \\ \Gamma_2[x,y,z] & \xrightarrow{\varphi^2[x,y,z]} & \Gamma_2'[x\varphi, y\varphi, z\varphi] \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: De acuerdo con las Proposiciones IV.6 y IV.8, la correspondencia que asigna a cada elemento de $\Gamma_2[x, y, z]$ el elemento de $\Gamma_2'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$ que contiene la imagen por φ de un elemento del primero define una función $\varphi^2[x, y, z]$ de $\Gamma_2[x, y, z]$ en $\Gamma_2'[x\varphi, y\varphi, z\varphi]$. Es claro, de esta definición, que $\varphi^2[x, y, z]$ satisface todas las condiciones de la conclusión. l.q.q.d.

V. Casos particulares

Las convenciones y notaciones de las Partes II y III se usarán en esta parte. Esta será dividida en tres secciones: en la primera no se impone restricción alguna; en la segunda se impone una restricción en relación con las $\mathcal{H}$-clases de S; en la tercera se impone la restricción de conmutatividad de la operación en S, restricción ésta más fuerte que la de la segunda.

A. En esta sección se consideran elementos x e y de S. Subconjuntos $A[x, y]$, $B[x, y]$, $C[x, y]$ y $D[x, y]$ de S se definen por

$$
\begin{aligned}
A[x, y] &= A[x, y, xy], \\
B[x, y] &= B[x, y, xy], \\
C[x, y] &= C[x, y, xy], \\
D[x, y] &= D[x, y, xy].
\end{aligned}
$$

Conjuntos $\mathcal{R}[x, y]$ y $\mathcal{O}[x, y]$ se definen por

$$\mathcal{R}[x, y] = \mathcal{R}[x, y, xy] \quad \text{y} \quad \mathcal{O}[x, y] = \mathcal{O}[x, y, xy].$$

Todas las proposiciones de esta sección son consecuencias evidentes de los resultados de la Parte III, razón por la cual solamente se enunciarán.

Proposición V.1: $xA[x, y] = B[x, y]$.

Proposición V.2: $C[x, y] \subseteq D[x, y]$.

Proposición V.3: *$C[x, y]$ es vacío o es un subsemigrupo de $H_y \mathbin{.\!\cdot} y$.*

Proposición V.4: *$D[x, y]$ es vacío o es un subsemigrupo de $H_{xy} \mathbin{.\!\cdot} xy$.*

Proposición V.5: *Una condición necesaria y suficiente para que $C[x, y]$ no sea vacío es que $H_y \mathbin{.\!\cdot} y$ no sea vacío; en este caso $C[x, y]$ contiene todo elemento c de $H_y \mathbin{.\!\cdot} y$ tal que $yc = y$.*

Proposición V.6: $\mathcal{R}[x, y] \subseteq \mathcal{O}[x, y]$.

Proposición V.7: *Si $C[x, y]$ no es vacío, entonces $\mathcal{R}[x, y]$ es una congruencia en $C[x, y]$.*

Proposición V.8: *Si $D[x, y]$ no es vacío, entonces $\mathcal{O}[x, y]$ es una congruencia en $D[x, y]$.*

Proposición V.9: *Si $C[x, y]$ no es vacío, entonces $C[x, y]/\mathcal{R}[x, y]$ y $D[x, y]/\mathcal{O}[x, y]$ son grupos.*

Grupos $\Gamma_1[x, y]$ y $\Gamma_2[x, y]$ se definen del modo siguiente: si $H_y \mathbin{.\!\cdot} y$ es vacío, y por lo tanto $C[x, y]$ es también vacío, entonces $\Gamma_1[x, y]$ y $\Gamma_2[x, y]$ son iguales al grupo trivial; si $H_y \mathbin{.\!\cdot} y$ no es vacío, y por lo tanto $C[x, y]$ no es tampoco vacío, $\Gamma_1[x, y]$ y $\Gamma_2[x, y]$ son, respectivamente, los grupos $C[x, y]/\mathcal{R}[x, y]$ y $D[x, y]/\mathcal{O}[x, y]$, y los homomorfismos naturales de $C[x, y]$ sobre $\Gamma_1[x, y]$ y de $D[x, y]$ sobre $\Gamma_2[x, y]$ son, respectivamente, denotados por $\sigma[x, y]$ y $\tau[x, y]$. El homomorfismo inclusión de $C[x, y]$ en $D[x, y]$ se denota por $\delta[x, y]$.

Proposición V.10: *Si $H_y \mathbin{.\!\cdot} y$ no es vacío, entonces existe un homomorfismo de $\Gamma_1[x, y]$ sobre $\Gamma_2[x, y]$, que se denotará por $\gamma[x, y]$, tal que el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
C[x, y] \arrow[r, "{\delta[x, y]}"] \arrow[d, "{\sigma[x, y]}"] & D[x, y] \arrow[d, "{\tau[x, y]}"] \\
\Gamma_1[x, y] \arrow[r, "{\gamma[x, y]}"] & \Gamma_2[x, y]
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo.

Proposición V.11: *Si* $xH_y \subseteq H_{xy}$, *entonces* $C[x, y] = H_y \therefore y$, $\mathfrak{R}[x, y] = \mathfrak{S}_y$ *y* $\Gamma_1[x, y] = \Gamma_y$.

Proposición V.12: *Si* $H_{xy} \subseteq xH_y$, *entonces* $D[x, y] = H_{xy} \therefore xy$, $\mathfrak{O}[x, y] = \mathfrak{S}_{xy}$ *y* $\Gamma_2[x, y] = \Gamma_{xy}$.

Proposición V.13: *Si* $H_y \therefore y$ *no es vacío y* x *es cancelativo a la izquierda sobre* H_y, *entonces* $\gamma[x, y]$ *es biunívoca.*

Proposición V.14: *Si* S *tiene elemento identidad (y por lo tanto* $C[x, y]$ *no es vacío), si* $xH_y \subseteq H_{xy}$, *y si* $\gamma[x, y]$ *es biunívoca, entonces* x *es cancelativo a la izquierda sobre* H_y.

Proposición V.15: *Si* x *es cancelativo a la izquierda sobre* S, *entonces* $C[x, y] = D[x, y]$, $\mathfrak{R}[x, y] = \mathfrak{O}[x, y]$, $\Gamma_1[x, y] = \Gamma_2[x, y]$ *y* $\gamma[x, y]$ *es el isomorfismo identidad.*

B. Se supondrá en esta sección que se satisface la condición siguiente: si $x \in S$ e $y \in S$, entonces $xH_y \subseteq H_{xy}$.

Proposición V.16: *Si* $x \in S$ *e* $y \in S$, *entonces* $H_y \therefore y \subseteq H_{xy} \therefore xy$.

Demostración: Si $t \in H_y \therefore y$, entonces $yt \in H_y$, de donde $(xy)t = x(yt) \in xH_y \subseteq H_{xy}$, lo cual implica que $t \in H_{xy} \therefore xy$. l.q.q.d.

Proposición V.17: *Si* $x \in S$ *e* $y \in S$, entonces $\mathfrak{S}_y \subseteq \mathfrak{S}_{xy}$.

Demostración: Sea $(u, v) \in \mathfrak{S}_y$. Esto quiere decir que $u \in H_y \therefore y$, $v \in H_y \therefore y$ e $yu = yv$. En virtud de la proposición anterior, se deduce que $u \in H_{xy} \therefore xy$ y $v \in H_{xy} \therefore xy$. Como también $(xy)u = x(yu) = x(yv) = (xy)v$, se concluye que $(u, v) \in \mathfrak{S}_{xy}$. l.q.q.d.

Proposición V.18: *Si* $x \in S$ *e* $y \in S$, *si* $H_y \therefore y$ *no es vacío, y si* $\alpha[x, y]$ *es el homomorfismo inclusión de* $H_y \therefore y$ *en* $H_{xy} \therefore xy$, *entonces existe un homomorfismo* $\beta[x, y]$ *de* Γ_y *en* Γ_{xy} *tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} H_y \therefore y & \xrightarrow{\alpha[x, y]} & H_{xy} \therefore xy \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_y} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{xy}} \\ \Gamma_y & \xrightarrow{\beta[x, y]} & \Gamma_{xy} \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: En virtud de la Proposición V.16, la correspondencia que asigna a cada elemento de Γ_y el elemento de Γ_{xy} que contiene un elemento del primero define una función de Γ_y en Γ_{xy}, que será denotada por $\beta[x, y]$. Es claro que $\beta[x, y]$ satisface todas las condiciones de la conclusión. l.q.q.d.

Proposición V.19: *Si* $x \in S$ *e* $y \in S$, *entonces* $C[x, y] = H_y \therefore y$, $\mathfrak{R}[x, y] = \mathfrak{S}_y$ *y* $\Gamma_1[x, y] = \Gamma_y$.

Demostración: Esto ya se ha visto en la Sección A.

Proposicíón V.20: *Si* $x \in S$, $y \in S$ *y* $z \in S$, *entonces* $C[x, y] \subseteq C[zx, zy]$, $R[x, y] \subseteq \mathcal{R}[zx, zy]$, $C[xy, z] \subseteq C[x, yz]$ *y* $\mathcal{R}[xy, z] \subseteq \mathcal{R}[x, yz]$.

Demostración: En virtud de la Proposición V.19, se tiene que $C[x, y] = H_y \therefore y$, $C[zx, zy] = H_{zy} \therefore zy$, $\mathcal{R}[x, y] = \mathcal{S}_y$, $\mathcal{R}[zx, zy] = \mathcal{S}_{zy}$, $C[xy, z] = H_z \therefore z$, $C[x, yz] = H_{yz} \therefore yz$, $\mathcal{R}[xy, z] = \mathcal{S}_z$, y $\mathcal{R}[x, yz] = \mathcal{S}_{yz}$. La conclusión se deduce entonces de las Proposiciónes V.16 y V.17. l.q.q.d.

Proposición V.21: *Si* $x \in S$, $y \in S$ *y* $z \in S$, *y si* $H_y \therefore y$ *no es vacío, entonces* $\alpha[x, y]$ *es el homomorfismo inclusión de* $C[x, y]$ *en* $C[zx, zy]$, $\beta[z, y]$ *es un homomorfismo de* $\Gamma_1[x, y]$ *en* $\Gamma_1[zx, zy]$, *y el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C[x,y] & \xrightarrow{\alpha[z,y]} & C[zx,zy] \\ \Big\downarrow{\sigma[x,y]} & & \Big\downarrow{\sigma[zx,xy]} \\ \Gamma_1[x,y] & \xrightarrow{\beta[z,y]} & \Gamma_1[zx,zy] \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: Esto es una consecuencia evidente de las Proposiciónes V.18, V.19 y V.20; nótese que $\pi_y = \sigma[x, y]$ y $\pi_{zy} = \sigma[zx, zy]$.

Proposición V.22: *Si* $x \in S$, $y \in S$ *y* $z \in S$, *y si* $H_z \therefore z$ *no es vacío, entonces* $\alpha[y, z]$ *es el homomorfismo inclusión de* $C[xy, z]$ *en* $C[x, yz]$, $\beta[y, z]$ *es un homomorfismo de* $\Gamma_1[xy, z]$ *en* $\Gamma_1[x, yz]$, *y el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C[xy,z] & \xrightarrow{\alpha[y,z]} & C[x,yz] \\ \Big\downarrow{\sigma[xy,z]} & & \Big\downarrow{\sigma[x,yz]} \\ \Gamma_1[xy,z] & \xrightarrow{\beta[y,z]} & \Gamma_1[x,yz] \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: Esto es también una consecuencia evidente de las Proposiciones V.18, V.19 y V.20; nótese que $\pi_z = \sigma[xy, z]$ y $\pi_{yz} = \sigma[x, yz]$.

Proposición V.23: *Si* $x \in S$ *e* $y \in S$, *entonces* $D[x, y] = xH_y \therefore xH_y$.

Demostración: Por definición, se tiene que $D[x, y] = B[x, y] \therefore B[x, y]$. Pero $B[x, y] = xH_y \frown H_{xy} = xH_y$, de donde $D[x, y] = xH_y \therefore xH_y$. l.q.q.d.

C. Se supondrá en esta sección final que se satisface la condición siguiente: si $x \in S$ e $y \in S$, entonces $xy = yx$ (es decir, la multiplicación de S es conmutativa).

Proposición V.24: *Si* $x \in S$ *e* $y \in S$, *entonces* $xH_y \subseteq H_{xy}$.

Demostración: Sea $z \in H_y$. Si $z = y$, entonces $xz = xy \in H_{xy}$. Si $z \neq y$, entonces existen elementos u y v de S tales que $z = yu$ e $y = zv$, de donde $xz = x(yu) = (xy)u$ y $xy = x(zv) = (xz)v$, y se deduce que xz y xy son $\mathcal{H}$-equivalentes, o sea $xz \in H_{xy}$. En todo caso se tiene que $xz \in H_{xy}$. l.q.q.d.

De acuerdo con esta última proposición, todos los resultados de la Sección B son aplicables en esta sección.

Proposición V.25: *Si* $x \in S$, $y \in S$ *y* $z \in S$, *entonces* $xH_y \mathrel{.\!\cdot} xH_y \subseteq (zx)H_{zy} \mathrel{.\!\cdot} (zx)H_{zy}$.

Demostración: Sea $t \in xH_y \mathrel{.\!\cdot} xH_y$; esto quiere decir que $(xH_y)t \subseteq xH_y$, de donde $(xy)t \in xH_y$, y por lo tanto $xyzt = zxyt \in zxH_y = xzH_y \subseteq xH_{zy}$. Sea ahora $w \in (zx)H_{zy}$; entonces $w = zxzy$ ó $w = zxzyv$ para algún elemento v de $H_{zy} \mathrel{.\!\cdot} zy$. Así, siguiendo los casos, $wt = zxzyt = z(xyzt) \in z(xH_{zy}) = (zx)H_{zy}$ ó $wt = zxzyvt = (vz)(xyzt) \in (vz)(xH_{zy}) = (zx)(H_{zy}v) = (zx)H_{zy}$; luego, en todo caso, $wt \in (zx)H_{zy}$. Por lo tanto $w \in (zx)H_{zy} \mathrel{.\!\cdot} (zx)H_{zy}$. l.q.q.d.

Proposición V.26: *Si* $x \in S$, $y \in S$ *y* $z \in S$, *entonces* $(xy)H_z \mathrel{.\!\cdot} (xy)H_z \subseteq xH_{yz} \mathrel{.\!\cdot} xH_{yz}$.

Demostración: Sea $t \in (xy)H_z \mathrel{.\!\cdot} (xy)H_z$; esto quiere decir que $((xy)H_z)t \subseteq (xy)H_z$, de donde $xyzt \in xyH_z$. Luego $xyzt = xyz$ ó $xyzt = xyzu$ para algún elemento u de $H_z \mathrel{.\!\cdot} z$. Sea ahora $w \in H_{yz}$; entonces $w = yz$ ó $w = yzv$ para algún elemento v de $H_{yz} \mathrel{.\!\cdot} yz$. Combinando los cuatro casos posibles, se tiene que $(xw)t = xyzt = xyz \in xH_{yz}$, ó $(xw)t = xyzt = xyzu \in xyH_zu = xyH_z \subseteq xH_{yz}$, ó $(xw)t = xyzvt = (xyzt)v = xyzv \in xH_{yz}v = xH_{yz}$, ó $(xw)t = xyzvt = (xyzt)v = (xyzu)v \in (xyH_zu)v = (xyH_z)v \subseteq (xH_{yz})v = x(H_{yz}v) = xH_{yz}$. Así, en todo caso, se tiene que $(xw)t \in xH_{yz}$. Por lo tanto $t \in xH_{yz} \mathrel{.\!\cdot} xH_{yz}$. l.q.q.d.

Proposición V.27: *Si* $x \in S$, $y \in S$ *y* $z \in S$, *entonces* $D[x, y] \subseteq D[zx, zy]$ *y* $D[xy, z] \subseteq D[x, yz]$.

Demostración: Esto es una consecuencia inmediata de las Proposiciones V.23, V.25 y V.26.

Proposición V.28: *Si* $x \in S$, $y \in S$ *y* $z \in S$, *entonces* $\mathcal{S}_{xy} \subseteq \mathcal{S}_{(zx)(zy)}$.

Demostración: Esto es claro, pues, en virtud de la Proposición V.17, se tiene que $\mathcal{S}_{xy} \subseteq \mathcal{S}_{(zz)(xy)} = \mathcal{S}_{(zx)(zy)}$. l.q.q.d.

Proposición V.29: *Si* $x \in S$, $y \in S$ *y* $z \in S$, *entonces* $\mathcal{O}[x, y] \subseteq \mathcal{O}[zx, zy]$ *y* $\mathcal{O}[xy, z] \subseteq \mathcal{O}[x, yz]$.

Demostración: Se deduce fácilmente de las Proposiciones V.27 y V.28 que $\mathcal{O}[x, y] = (D[x, y] \times D[x, y]) \frown \mathcal{S}_{xy} \subseteq (D[zx, zy] \times D[zx, zy]) \frown \mathcal{S}_{(zx)(zy)} = \mathcal{O}[zx, zy]$, y también que $\mathcal{O}[xy, z] = (D[xy, z] \times D[xy, z]) \frown \mathcal{S}_{(xy)z} \subseteq (D[x, yz] \times D[x, yz]) \frown \mathcal{S}_{x(yz)} = \mathcal{O}[x, yz]$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN V.30: *Si x, y y z son elementos de S tales que $D[x, y]$ no es vacío, y si $\epsilon[x, y, z]$ es el homomorfismo inclusión de $D[x, y]$ en $D[zx, zy]$, entonces existe un homomorfismo $\theta[x, y, z]$ de $\Gamma_2[x, y]$ en $\Gamma_2[zx, zy]$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} D[x,y] & \xrightarrow{\epsilon[x,y,z]} & D[zx,zy] \\ \downarrow{\scriptstyle \tau[x,y]} & & \downarrow{\scriptstyle \tau[zx,zy]} \\ \Gamma_2[x,y] & \xrightarrow{\theta[x,y,z]} & \Gamma_2[zx,zy] \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: En virtud de las Proposiciones V.27 y V.29, la correspondencia que asigna a cada elemento de $\Gamma_2[x, y]$ el elemento de $\Gamma_2[zx, zy]$ que contiene un elemento del primero define una función de $\Gamma_2[x, y]$ en $\Gamma_2[zx, zy]$, que será denotada por $\theta[x, y, z]$. Es evidente que $\theta[x, y, z]$ satisface todas las condiciones de la conclusión. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN V.31: *Si x, y y z son elementos de S tales que $D[xy, z]$ no es vacío, y si $\lambda[x, y, z]$ es el homomorfismo inclusión de $D[xy, z]$ en $D[x, yz]$, entonces existe un homomorfismo $\mu[x, y, z]$ de $\Gamma_2[xy, z]$ en $\Gamma_2[x, yz]$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} D[xy,z] & \xrightarrow{\lambda[x,y,z]} & D[x,yz] \\ \downarrow{\scriptstyle \tau[xy,z]} & & \downarrow{\scriptstyle \tau[x;yz]} \\ \Gamma_2[xy,z] & \xrightarrow{\mu[x,y,z]} & \Gamma_2[x,yz] \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: En virtud de las Proposiciones V.27 y V.29, la correspondencia que asigna a cada elemento de $\Gamma_2[xy, z]$ el elemento de $\Gamma_2[x, yz]$ que contiene un elemento del primero define una función de $\Gamma_2[xy, z]$ en $\Gamma_2[x, yz]$, que será denotada por $\mu[x, y, z]$. Es claro que $\mu[x, y, z]$ satisface todas las condiciones de la conclusión. l.q.q.d.

THE UNIVERSITY OF GEORGIA, ATHENS

REFERENCIAS

[1] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, The algebraic theory of semigroups, Volume I, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1961.