CIERTO TIPO DE ESTABILIDAD

POR CARLOS IMAZ* Y ZDENĚK VOREL†

1. Introducción

Estudiaremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1}$$

donde x y f son vectores n-dimensionales y u representa genéricamente un elemento variable (parámetros, controles) tomado de un conjunto Ω (conjunto admisible). La función $f(t, x, u)$ y el conjunto Ω son tales que el sistema (1) satisface condiciones de existencia y unicidad de solución en un conjunto $D^* \times I \times \Omega$, donde $D^* \subset E^n$ es una región que contiene el origen e I es el intervalo de tiempo $[0, +\infty)$.

El objetivo general será seleccionar $u \in \Omega$ de tal manera que todas las soluciones de (1) que se inicien en cierto conjunto $D \times I$ (donde $D \subset D^*$ es acotado, conexo y contiene en su interior el origen) se "acerquen" al origen a medida que crece t. Esto es, si $\epsilon > 0$ es dado, y si S_ϵ designa la esfera cerrada de radio ϵ y centro en el origen, entonces queremos que todas las soluciones de (1) que se inician en $(D - S_\epsilon) \times I$ lleguen eventualmente al cilindro $S_\epsilon \times I$. En particular nuestras condiciones serán suficientemente fuertes como para garantizar que las soluciones que empiezan en el cilindro $S_\epsilon \times I$ se quedan en él. En este sentido nuestros resultados abarcan algunos de Rosen ([2]). Veremos también que en ciertos casos la selección de $u \in \Omega$ es susceptible de ser "optimizada." Algunas ideas del presente trabajo se encuentran en [1].

El problema puede considerarse como de cierta estabilidad global (global respecto a $D \times I$), ó como un problema de control en el cual se trata de conservar $\| x \|$ dentro de cierto límite.

2. Definiciones

Sea $\epsilon > 0$ dado y fijo, y denotemos con $\| x \|$ la norma euclideana usual.

DEFINICIÓN 1. Sea $u_0 \in \Omega$, decimos que el sistema (1) es fuertemente ϵ-estable en D respecto a u_0, si dados cualesquiera $t_0 \in I$, $x_0 \in D$, con $\| x_0 \| > \epsilon$, esto implica la existencia de $t_1 \in [0, +\infty]$ (como función de t_0, x_0) tal que la solución $x(t, t_0, x_0, u_0)$ de (1) satisface:

(a) $\epsilon < \| x(t, t_0, x_0, u_0) \| < \| x_0 \|, \quad t_0 < t < t_1$

(b) $\| x(t_1, t_0, x_0, u_0) \| = \epsilon.$

Donde en (b) la igualdad debe interpretarse como un límite si $t_1 = +\infty$.

---

* del Centro de Investigación del IPN.

† de la Academia de Ciencias de Checoeslovaquia. Visitante del Centro de Investigación del IPN en el año de 1963.

DEFINICIÓN 2. Decimos que la estabilidad anterior es "uniforme," si se cumple además:

(c) $\sup_{t_0, x_0} \{(t_1 - t_0) \mid (t_0, x_0) \in I \times (D - S_\epsilon)\} < +\infty$.

Esto es, si el tiempo necesario para alcanzar el cilindro $S_\epsilon \times I$ está uniformemente acotado para todo $(t_0, x_0) \in I \times (D - S_\epsilon)$.

El problema será determinar condiciones suficientes para que el sistema (1) sea estable en los sentidos anteriores para cierta elección de $u \in \Omega$.

3. Condiciones para ϵ-estabilidad

Por razón de simplicidad tomemos $D = S_R = \{x \mid \| x \| \leqq R, R > \epsilon\}$, esto es, la esfera cerrada de radio $R > \epsilon$ y centro en el origen. Siguiendo más o menos la notación de [2] definimos el funcional:

$$\Delta(\alpha, u) \equiv \sup_{x,t} \{\alpha^{-1} x^T f(t, x, u) \mid \| x \| = \alpha, t \in I\} \tag{2}$$

para todas $u \in \Omega$ y $\epsilon \leqq \alpha \leqq R$.

Supóngase que los elementos $u \in \Omega$ son funciones $u(t)$ de I en $Z \subset E^r$, y denotemos con $\| u \|_1 = \sup_{t \in I} \{\| u(t) \|\}$, la norma de $u \in \Omega$.

LEMA 1. *Si $f(t, x, u)$ es acotada y continua en x, u para $x \in S_{\epsilon R} = \{x \mid \epsilon \leqq \| x \| \leqq R\}$, $u \in \Omega$, uniformemente respecto a $t \in I$, entonces $\Delta(\alpha, u)$ es continua en α, u, uniformemente respecto a α para $\epsilon \leqq \alpha \leqq R$, $u \in \Omega$.*

Observación 1. Sea $f_1(t, x, v)$ una función definida en $I \times S_{\epsilon R} \times Z$ y sea $f_1(t, x, u(t)) = f(t, x, u)$ para $x \in S_{\epsilon R}$, $u \in \Omega$ y toda $t \in I$. Si $\| f_1(t, x, v) \| \leq M$ y si para cada $(x_0, v_0) \in S_{\epsilon R} \times Z$ se tiene $\| f_1(t, x, v) - f_1(t, x_0, v_0) \| \to 0$ con $\| x - x_0 \| + \| v - v_0 \| \to 0$ uniformemente con respecto a $t \in I$, entonces se satisfacen las hipótesis del Lema 1, lo cual se sigue inmediatamente de la definición de la norma $\| u \|_1$. Además la continuidad es uniforme también respecto a $x \in S_{\epsilon R}$, ya que $S_{\epsilon R}$ es compacto.

Demostración del Lema 1. Sea $\alpha_0 \in [\epsilon, R]$, $u_0 \in \Omega$, $\{\alpha_i, u_i\}$ una sucesión tal que $\alpha_i \to \alpha_0$, $u_i \to u_0$ (uniformemente respecto a $t \in I$) para $i \to \infty$, y supongamos $| \Delta(\alpha_i, u_i) - \Delta(\alpha_0, u_0) | > \gamma$. Por la hipótesis existe una $\delta > 0$ tal que $\| x_1 - x_2 \| < \delta$, $\| u_1 - u_0 \|_1 < \delta$, $x_1, x_2 \in S_{\epsilon R}$, $u_1 \in \Omega$, implica

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{x_1^T}{\| x_1 \|} f(t, x_1, u_1) - \frac{x_2^T}{\| x_2 \|} f(t, x_2, u_0) \right| \\
&= \left| \frac{x_1^T}{\| x_1 \|} [f(t, x_1, u_1) - f(t, x_2, u_0)] + \left(\frac{x_1^T}{\| x_1 \|} - \frac{x_2^T}{\| x_2 \|} \right) f(t, x_2, u_0) \right| \\
&\leqq \| f(t, x_1, u_1) - f(t, x_2, u_0) \| + \left| \left(\frac{x_1^T - x_2^T}{\| x_1 \|} + \frac{(\| x_2 \| - \| x_1 \|) x_2^T}{\| x_1 \| \, \| x_2 \|} \right) f(t, x_2, u_0) \right| \\
&\leqq \frac{\gamma}{2}
\end{aligned} \tag{3}$$

para toda $t \in I$. Ya que $\alpha_i \to \alpha_0$, $\| u_i - u_0 \|_1 \to 0$, existen α_p, u_p tales que $| \alpha_p - \alpha_0 | < \delta$, $\| u_0 - u_p \|_1 < \delta$. Por simplicidad consideremos sólo el caso en que $\Delta(\alpha_p, u_p) > \Delta(\alpha_0, u_0) + \gamma$. Obviamente existen x_p, t^*, $\| x_p \| = \alpha_p$, $t^* \in I$, tales que

$$\frac{x_p^T}{\| x_p \|} f(t^*, x_p, u_p) > \Delta(\alpha_p, u_p) - \frac{\gamma}{2}. \tag{4}$$

Sea ahora $x_0 = (\alpha_0/\alpha_p)x_p$. Evidentemente $\| x_0 \| = \alpha_0$ y $\| x_0 - x_p \| = | \alpha_0 - \alpha_p | < \delta$. Según (3), donde ponemos $x_1 = x_p$, $x_2 = x_0$, $u_1 = u_p$, y según (4), tenemos

$$\frac{x_0^T}{\| x_0 \|} f(t^*, x_0, u_0) > \frac{x_p^T}{\| x_p \|} f(t^*, x_p, u_p) - \frac{\gamma}{2} > \Delta(\alpha_p, u_p) - \gamma,$$

lo cual contradice a

$$\frac{x_0^T}{\| x_0 \|} f(t^*, x_0, u_0) \leqq \Delta(\alpha_0, u_0) < \Delta(\alpha_p, u_p) - \gamma.$$

TEOREMA 1. *Sea* $u_1 \in \Omega$, $f(t, x, u_1) = F(t, x)$ *lipschitziana en* x, *acotada y continua uniformemente respecto a* t *para* $t \in I$, $x \in S_{\epsilon R}$, *y sea*

$$\Delta(\alpha, u_1) = \Delta(\alpha) < 0 \tag{5}$$

para $\epsilon < \alpha \leqq R (\epsilon \leqq \alpha \leqq R)$, *entonces* (1) *es* (*uniformemente*) *fuertemente* ϵ-*estable en* S_R *respecto a* $u_1 \in \Omega$.

Demostración. Sea $t_0 \in I$, y sea $x(t)$ la solución de $\dot{x} = F(t, x)$ con condición inicial $x(t_0) = x_0$, $\| x_0 \| \in (\epsilon, R]$. Ya que

$$\frac{d \| x(t) \|}{dt} = \frac{[x(t)]^T}{\| x(t) \|} F(t, x(t)) < 0$$

si $\| x(t) \| \in (\epsilon, R]$, $t \in I$, tenemos que $\| x(t) \|$ decrece para toda $t > t_0$ tal que $\| x(t) \| > \epsilon$. Supongamos que $\lim_{t \to \infty} \| x(t) \| = a$, $\epsilon < a < R$, lo cual implica

$$\frac{[x(t)]^T}{\| x(t) \|} F(t, x(t)) \to 0$$

cuando $t \to \infty$. Entonces $\Delta(\alpha) \to 0$, $\alpha \to a$, y por continuidad (Lema 1) $\Delta(a) = 0$, lo cual es una contradicción. Entonces, o bien existe una $t_1 > t_0$, tal que $\| x(t_1) \| = \epsilon$, o bien $\lim_{t \to \infty} \| x(t) \| = \epsilon$.

Si además $\Delta(\alpha) < 0$ para $\epsilon \leqq \alpha \leqq R$, se tiene por la continuidad que existe $\beta < 0$ tal que $\Delta(\alpha) < \beta$ para $\epsilon \leqq \alpha \leqq R$. Ahora bien

$$\| x(t) \| - \| x_0 \| \leqq \int_{t_0}^{t} \Delta(\| x(\tau) \|) \, d\tau < \beta(t - t_0),$$

de donde, $t_1 - t_0 < (R - \epsilon)/-\beta$ para todas $t_0 \in I$ y x_0 tal que $\| x_0 \| \in (\epsilon, R]$ y por lo tanto la estabilidad es uniforme.

Observación 2. Si suponemos sólo que $F(t, x)$ satisface algunas condiciones de existencia y unicidad para cada punto inicial $t_0 \epsilon I$, x_0 tal que $\| x_0 \| \in (\epsilon, R]$, podemos comprobar la ϵ-estabilidad fuerte de (1) bajo la hipótesis que sigue: Existe una función continua $h(\alpha) < 0$ en $(\epsilon, R]$ tal que $\Delta(\alpha) < h(\alpha)$ para cada $\alpha \in (\epsilon, R]$. El argumento de la demostración es el mismo que en el Teorema 1. La hipótesis de que $F(t, x)$ sea uniformemente continua y acotada sirve para garantizar que $\Delta(\alpha)$ sea continua. Pero esto no es necesario si $\Delta(\alpha) < h(\alpha)$.

4. Estabilidad respecto a una vecindad de $u \in \Omega$

Supongamos que el sistema (1) es uniformemente fuertemente ϵ-estable respecto a $u_0 \in \Omega$. Es de utilidad saber cuando (1) conserva esta propiedad para cambios pequeños de u_0, lo cual está contenido en:

Teorema 2. *Sea $f(t, x, u)$ lipschitziana en x, acotada y continua en x, u uniformemente respecto a $t \in I$ para cada $(x, u) \in S_{\epsilon R} \times \Omega_1$, donde $\Omega_1 \subset \Omega$ es una vecindad de u_0; sea $\Delta(\alpha, u_0) < 0$ para $\epsilon \leqq \alpha \leqq R$. Entonces existe una vecindad $\Omega_2 \subset \Omega_1$ de u_0 tal que $u \in \Omega_2$ implica que* (1) *es uniformemente fuertemente ϵ-estable respecto a $u \in \Omega_2$.*

Demostración: Según el Lema 1 $\Delta(\alpha, u_0)$ es continua para $\alpha \in [\epsilon, R]$. Entonces existe $\beta < 0$ tal que $\Delta(\alpha, u_0) < \beta$ para $\epsilon \leqq \alpha \leqq R$. Por la continuidad en u_0 existe una vecindad $\Omega_2 \subset \Omega_1$ de u_0 tal que $\Delta(\alpha, u) < 0$ en $[\epsilon, R] \times \Omega_2$, y el resultado se sigue del Teorema 1.

5. Sistemas con parte lineal

Considérese en particular un sistema de la forma

$$\dot{x} = A(t, u^1)x + g(t, x, u^2), \tag{6}$$

donde $A(t, u^1)$ es una $n \times n$ matriz acotada y continua uniformemente respecto a $t \in I$ para $u^1 \in \Omega_1$, y $g(t, x, u^2)$ es lipschitziana en $x \in S_{\epsilon R}$, y continua en $(t, x, u^2) \in I \times S_{\epsilon R} \times \Omega_2$, uniformemente respecto a $t \in I$. Aquí $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Además supondremos

$$\| g(t, x, u^2) \| \leqq h(\| x \|, u^2)$$

para $t \in I$, $x \in S_{\epsilon R}$, $u^2 \in \Omega_2$ y $h(s, q)$ acotada y continua en ambas variables, donde ésta última puede interpretarse como funcional en q, ó como función compuesta de t al substituirse $u^2 \in \Omega_2$, de cualquier manera no habrá ambiguedad en las consideraciones posteriores. Usualmente uno piensa en $g(t, x, u^2)$ como una función del tipo $o(\| x \|)$, pero esto no importa por ahora.

Definamos:

$$\lambda(t, u^1) = \max_z \{z^T A(t, u^1)z \mid \| z \| = 1\}$$

para toda $t \in I$ y $u^1 \in \Omega_1$.

Teorema 3. *Una condición suficiente para que el sistema* (6) *sea* (*uniformemente*) *fuertemente ϵ-estable en S_R respecto a $(u_0^1, u_0^2) \in \Omega$ es que*

$$\sup_{t \in I} \{\lambda(t, u_0^1)\alpha + h(\alpha, u_0^2)\} < 0$$

para toda $\epsilon < \alpha \leqq R(\epsilon \leqq \alpha \leqq R)$.

Demostración: Tenemos

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha, u_0^1, u_0^2) &= \sup \{\alpha^{-1}x^T[A(t, u_0^1)x + g(t, x, u_0^2)] \mid \| x \| = \alpha, t \in I\} \\ &= \sup \{\alpha^{-1}x^T A(t, u_0^1)\alpha^{-1}x\alpha + \alpha^{-1}x^T g(t, x, u_0^2) \mid \| x \| = \alpha, t \in I\} \\ &\leqq \sup \{\lambda(t, u_0^1)\alpha + h(\alpha, u_0^2) \mid t \in I\};\end{aligned}$$

y de las hipótesis sobre $A(t, u^1)$, $g(t, x, u^2)$ y $h(\| x \|, u^2)$ se sigue facilmente que el segundo miembro de (6) es acotado y uniformemente continuo respecto a t y por el Teorema 1 tenemos la conclusión.

Observación 3. Nótese que en particular debemos tener $\lambda(t, u_0^1) < 0$; esto es, que la forma $z^T A(t, u_0^1)z$ debe ser negativa definida sobre la esfera $\| z \| = 1$ para toda $t \in I$.

Como aplicación inmediata considérese el sistema:

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{7}$$

donde $A(t)$ es una $n \times n$ matriz real uniformemente continua y acotada para $t \in I$. En este caso $\lambda(t, u^1) = \lambda(t)$ es el máximo eigen-valor de la matriz $\frac{1}{2}[A(t) + A^T(t)]$, $h(\| x \|, u^2) \equiv 0$, y R puede tomarse tan grande como queramos, ϵ tan pequeña como queramos. Luego si $\sup \{\lambda(t) \mid t \in I\} < 0$ tenemos que todas las soluciones de (7) tienden de manera monótona a $x = 0$ cuando $t \to \infty$. Este es un caso especial de un resultado más general debido a Wazewski ([3]).

6. Optimización

Si interpretamos el problema de la ϵ-estabilidad como un problema de control que se resuelve eligiendo en forma apropiada a $u \in \Omega$, es de interés saber que esta elección es succeptible de ser optimizada de alguna manera conveniente. Como el problema de la ϵ-estabilidad se ha resuelto en una forma global (respecto a $I \times S_{\epsilon R}$) es conveniente dar criterios de optimización globales. Hacer esto respecto a $I \times S_{\epsilon R}$ implicaría demasiadas restricciones y por ello preferimos hacerlo con respecto a $S_{\epsilon R}$.

DEFINICIÓN 3. Sea $t(\hat{t}, x, u)$ el tiempo cuando llega a $I \times S_\epsilon$ una solución de (1) que parte del punto $(\hat{t}, x)$, $\hat{t} \in I$, $x \in S_{\epsilon R}$ con función $u \in \Omega$. Diremos que $u^* \in \Omega$ es óptima para $\hat{t} = t_0$ si se cumple:

$$\sup_{x \in S_{\epsilon R}} \{t(t_0, x, u^*)\} = \inf_{u \in \Omega} \sup_{x \in S_{\epsilon R}} \{t(t_0, x, u)\}.$$

Veamos ahora que $u^* \in \Omega$ existe bajo condiciones bastante generales.

LEMA 2. *Supongamos que existe* $0 \leqq \epsilon' < \epsilon$ *tal que* $f(t, x, u)$ *es lipschitziana en* $x \in S_{\epsilon' R}$, *acotada y continua uniformemente respecto a* $t \in I$ *para todas* $x \in S_{\epsilon' R}$, $u \in \Omega$. *Sea* $t_0 \in I$ *fijo y supongamos además que existe* $u_0 \in \Omega$ *tal que* $\Delta(\epsilon, u_0) < 0$ *y que dado cualquier* $x_0 \in S_R$, $\| x_0 \| > \epsilon$, *entonces existe* $t_1 \in I$ *con* $t_0 < t_1 \ll \infty$, *tal que la solución $x(t, t_0, x_0, u_0)$ de (1) satisface las condiciones (a) y (b) de la Definición 1. Entonces la función sup $\{t(t_0, x, u) \mid x \in S_{\epsilon R}\}$ está definida en una vecindad de u_0 y es continua en $u = u_0$.*

Demostración. Vamos a probar que $t(t_0, x, u)$ con $x \in S_{\epsilon R}$ está definida en una vecindad de u_0. Después probaremos que dicha función es continua en $x \in S_{\epsilon R}$, $u = u_0$ uniformemente con respecto a $x \in S_{\epsilon R}$ y de ahí se sigue la conclusión del lema.

Del Lema 1 tenemos que existe $0 < \delta < \epsilon - \epsilon'$ tal que $\Delta(\alpha, u_0) < -\sigma, \sigma > 0$, para $|\alpha - \epsilon| < \delta$, para alguna σ conveniente. Sea $T_0 = t(t_0, x_0, u_0)$, por lo anterior existe $\beta > 0$ tal que

$$\epsilon - \delta < \| x(t, t_0, x_0, u_0) \| < \epsilon$$

para $T_0 < t < T_0 + \beta$, y $\| x(T_0 + \beta, t_0, x_0, u_0) \| = \epsilon - \delta$.

Consideremos el intervalo $[t_0, T_0 + \beta]$ y apliquemos ahí el teorema sobre dependencia continua de soluciones. Tenemos entonces que existen $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ tales que

$$\| x(t, t_0, x_0, u_0) - x(t, t_0, x, u) \| < \delta/2, \tag{8}$$

si $\| u_0 - u \|_1 < \gamma_1$, $\| x_0 - x \| < \gamma_2$.

De (8) tenemos que

$$\| x(T_0 + \beta, t_0, x, u) \| < \epsilon$$

para $\| u_0 - u \|_1 < \gamma_1$, $\| x_0 - x \| < \gamma_2$, y por lo tanto existe un punto único T, tal que

$$\| x(T, t_0, x, u) \| = \epsilon;$$

esto es, está definida $t(t_0, x, u)$ en una vecindad de x_0, u_0 y por la compacidad de $S_{\epsilon R}$ se sigue que $t(t_0, x, u)$ está definida para toda $x \in S_{\epsilon R}$ y una vecindad de u_0.

Sean ahora $u_i \to u_0$, $x_i \to x_0$ para $i \to \infty$, y sean $T_i = t(t_0, x_i, u_i)$, queremos probar que $T_i \to T_0$.

Suponiendo lo contrario, existe $0 < \gamma < \beta$, y una subsucesión $\{\tilde{T}_i\}$ de $\{T_i\}$ tal que $|\tilde{T}_i - T_0| > \gamma$ para $i > i_1$. Consideremos el intervalo $[T_0 - \gamma, T_0 + \gamma]$, es claro que existe $\gamma^* > 0$ tal que $| \| x(t, t_0, x_0, u_0) \| - \epsilon | > \gamma^*$ si $t \notin [T_0 - \gamma, T_0 + \gamma]$. Por otro lado $x(t, t_0, x_i, u_i) \to x(t, t_0, x_0, u_0)$ uniformemente en $t \in [t_0, T_0 + \beta]$. Luego $\| x(t, t_0, x_i, u_i) - x(t, t_0, x_0, u_0) \| < \gamma^*/2$ para $i > i_2 \geqq i_1$. De aquí se sigue inmediatamente que $| \| x(t, t_0, x_i, u_i) \| - \epsilon | > \frac{\gamma^*}{2}$ si $t \notin [T_0 - \gamma, T_0 + \gamma]$, pero esto es una contradicción ya que T_i, $i > i_2$ no está en ese intervalo. La uniformidad en x es consecuencia de la compacidad de $S_{\epsilon R}$.

Observación 4. Nótese que el lema anterior se satisface bajo las condiciones del Teorema 1 para $\epsilon' \leqq \alpha \leqq R$.

Observación 5. De la demostración del Lema 2 se sigue que $t(t_0, x, u_0)$ es continua en $x \in S_{\epsilon R}$, y por consiguiente, $\sup_{x \in S_{\epsilon R}} t(t_0, x, u_0) < \infty$.

TEOREMA 4. *Si las hipótesis del Lema 2 se satisfacen para cada* $u_0 \in \Omega$ *y si las funciones de* Ω *son uniformemente acotadas y equicontinuas en* $[t_0, \hat{t}]$, *donde* $\hat{t} = \sup \{t(t_0, x, \hat{u}_0) \mid x \in S_{\epsilon R}\}$ *para alguna* $\hat{u}_0 \in \Omega$, *entonces para* (1) *existe* $u^* \in \Omega$ *óptima respecto a* $t = t_0$.

Demostración. Sea $t^* = \inf_{u \in \Omega} \sup_{x \in S_{\epsilon R}} \{t(t_0, x, u)\}$. Sea $t_i \to t^*$ y u_i una sucesión correspondiente a t_i. Por las hipótesis en Ω existe una subsucesión u_i^* que converge uniformemente a $u^* \in \Omega$ en $[t_0, \hat{t}]$. Ya que $t(t_0, x, u_i^*)$ no depende de los valores de $u_i^*(t)$ para $t < t_0$ y $t > t(t_0, x, u_i^*)$, podemos cambiar las funciones $u_i^*(t)$ y $u^*(t)$ de tal manera que $\| u_i^* - u^* \|_1 = \sup_{t \in I} \| u_i^*(t) - u^*(t) \| \to 0$ para $i \to \infty$. Por el Lema 2 se tiene que $t^* = \sup \{t(t_0, x, u^*) \mid x \in S_{\epsilon R}\}$.

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DEL I P N, MÉXICO, D. F.

REFERENCIAS

[1] C. IMAZ, *Teoría de control*, notas mimeografiadas, publicadas por el Centro de Investigación del IPN (México, 1962).

[2] J. B. ROSEN, "Controllable stability and equivalent nonlinear programing problem," International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics (New York, 1963), pp. 366–376.

[3] T. WAZEWSKI, *Sur la limitation des intégrales des systemes d'équations différentieles linéaires ordinaires*, Studia Math., **10** (1948), 48–59.