GRUPOS Y HOMOMORFISMOS ASOCIADOS CON UN SEMIGRUPO, II

Por Julio Rafael Bastida

La presente nota es una continuación del trabajo, "Grupos y homomorfismos asociados con un semigrupo I," citado en la bibliografía.

Los resultados básicos presentados en esta nota son los de la parte VI, en la cual se demuestra que entre algunos de los grupos definidos en la parte III existen isomorfismos. Estos resultados permiten entonces enunciar la proposición fundamental (VII.2), así como una simplificación de una proposición anteriormente demostrada (VII.3).

Es posible, en virtud de los resultados de la parte VII, modificar la terminología del modo siguiente: Dado un semigrupo S, un elemento x de S, y $\mathcal{H}$-clases V y W de S tales que $xV \cap W$ no es vacío, existen grupos $\Gamma_1[x, V, W]$ y $\Gamma_2[x, V, W]$, y un homomorfismo $\gamma[x, V, W]$ del primero de éstos sobre el segundo; si x es cancelativo a la izquierda sobre V, entonces $\gamma[x, V, W]$ es un isomorfismo; además, si $xV \subseteq W$ y $\gamma[x, V, W]$ es un isomorfismo, entonces x es cancelativo a la izquierda sobre V (obteniendo así la proposición recíproca de la anterior, pero solamente en un caso particular). También se tiene la proposición siguiente: si x es un elemento de S, y si V, W_1 y W_2 son $\mathcal{H}$-clases de S tales que $xV \cap W_1$ y $xV \cap W_2$ no son vacíos, entonces se obtiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1[x, V, W_1] \arrow[r, "{\gamma[x, V, W_1]}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \Gamma_2[x, V, W_1], \arrow[d, leftrightarrow] \\ \Gamma_1[x, V, W_2] \arrow[r, "{\gamma[x, V, W_2]}"] & \Gamma_2[x, V, W_2], \end{tikzcd}$$

en el cual las flechas verticales son isomorfismos.

En la parte VIII se demuestra que todo homomorfismo de grupos puede ser "realizado" por un homomorfismo de la forma $\gamma[x, y]$ (introducido en la parte V).

VI. Isomorfismos de Grupos

Se consideran en esta parte elementos x, y y z de S tales que $z \in xH_y$ y $z \neq xy$. Las notaciones empleadas son las de las partes II, III y V.

Dado que $z \in xH_y$, es posible escribir $z = xg$, donde $g \in H_y$. Es evidente que $g \neq y$, pues en caso contrario se tendría que $z = xy$. Se deduce entonces que $y = gb$ y $g = yd$, donde b y d son elementos de S. Puesto que $yd = g \in H_y$ y $gb = y \in H_y$, se concluye que d y b son elementos de $H_y \mathbin{.\cdot} y$.

Como $xy = x(gb) = (xg)b = zb$ y $z = xg = x(yd) = (xy)d$, se tiene también que $(z, xy) \in \mathcal{R}$, es decir $R_z = R_{xy}$.

Proposición VI. 1: $H_z \subseteq R_{xy}$.

Demostración: En efecto, se sabe que $H_z \subseteq R_z$, y ya se vió que $R_z = R_{xy}$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI. 2: *Si* $u \in L_{xy}$, *entonces* $u(db) = u$.

Demostración: Consecuencia inmediata de la Proposición I.6.

PROPOSICIÓN VI.3: *Si* $u \in L_z$, *entonces* $u(bd) = u$.

Demostración: Consecuencia inmediata de la Proposición I.6.

PROPOSICIÓN VI.4: $H_{xy}\, d = H_z$.

Demostración: Es claro que $x \in H_{zy}\, d$, pues $z = (xy)\, d$. Además, por la Proposición VI.1, $z \in R_{xy}$. Se tiene así que $H_{xy} \subseteq R_{xy}$ y $z \in R_{xy} \frown H_{xy}\, d$, de donde, en virtud de la Proposición I.8, se deduce que $H_{xy}\, d$ es una $\mathcal{H}$-clase. Como $z \in H_{xy}\, d$, se concluye que $H_z = H_{xy}\, d$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.5: $H_z b = H_{xy}$.

Demostración: Dado que $xy = zb$, se sabe que $xy \in H_z b$. Además, puesto que $R_z = R_{xy}$, se sabe que $xy \in R_z$, de modo que $xy \in R_z \frown H_z b$. Como $H_z \subseteq R_z$, se deduce de la Proposición I.8 que $H_z b$ es una $\mathcal{H}$-clase. Como $xy \in H_z b$, se concluye que $H_{xy} = H_z b$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.6: $A[x, y]\, d \subseteq A[x, y, z]$ *y* $A[x, y, z]b \subseteq A[x, y]$.

Demostración: Se demuestra primeramente que $A[x, y]\, d \subseteq A[x, y, z]$. Sea pues $u \in A[x, y]$; entonces, dado que $A[x, y] = A[x, y, xy] = (H_{xy} \mathbin{.\cdot} x) \frown H_y$, se sabe que $u \in H_y$ y que $xu \in H_{xy}$. Como $d \in H_y \mathbin{.\cdot} y = H_y \mathbin{.\cdot} H_y$, se deduce que $ud \in H_y$; además, $x(ud) = (xu)\, d \in H_{xy}\, d$, de donde, en virtud de la Proposición VI.4, se deduce que $x(ud) \in H_z$, o sea $ud \in H_z \mathbin{.\cdot} x$. Luego $ud \in (H_z \mathbin{.\cdot} x) \frown H_y$, es decir $ud \in A[x, y, z]$. Se concluye, por lo tanto, que $A[x, y]\, d \subseteq A[x, y, z]$.

Se demuestra ahora que $A[x, y, z]b \subseteq A[x, y]$. Sea $v \in A[x, y, z]$; puesto que $A[x, y, z] = (H_z \mathbin{.\cdot} x) \frown H_y$, se sabe que $v \in H_y$ y que $xv \in H_z$. Dado que $b \in H_y \mathbin{.\cdot} y = H_y \mathbin{.\cdot} H_y$, se deduce que $vb \in H_y$; además $x(vb) = (xv)b \in H_z b$, y, en virtud de la Proposición VI.5, se concluye que $x(vb) \in H_{xy}$, o sea $vb \in H_{xy} \mathbin{.\cdot} x$. Luego $vb \in (H_{xy} \mathbin{.\cdot} x) \frown H_y$; es decir $vb \in A[x, y, xy] = A[x, y]$. Se concluye, por lo tanto, que $A[x, y, z]b \subseteq A[x, y]$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.7: $B[x, y]\, d = B[x, y, z]$ *y* $B[x, y, z]b = B[x, y]$.

Demostración: Aplicando la Proposición anterior, se tiene que $B[x, y]\, d = (xA[x, y])\, d = x(A[x, y]\, d) \subseteq xA[x, y, z] = B[x, y, z]$ y $B[x, y, z]b = (xA[x, y, z])b = x(A[x, y, z]b) \subseteq xA[x, y] = B[x, y]$.

Como $B[x, y]\, d \subseteq B[x, y, z]$ y $B[x, y, z]b \subseteq B[x, y]$, se tiene que $B[x, y]\, (db) = (B[x, y]\, d)b \subseteq B[x, y, z]b$ y $B[x, y, z](bd) = (B[x, y, z]b)\, d \subseteq B[x, y]\, d$. Ahora bien, dado que $B[x, y] \subseteq H_{xy} \subseteq L_{xy}$ y $B[x, y, z] \subseteq H_z \subseteq L_z$, se deduce de las Proposiciones VI.2 y VI.3 que $B[x, y]\, (db) = B[x, y]$ y $B[x, y, z]\, (bd) = B[x, y, z]$. Luego $B[x, y] \subseteq B[x, y, z]b$ y $B[x, y, z] \subseteq B[x, y]\, d$. Se concluye así que $B[x, y]\, d = B[x, y, z]$ y $B[x, y, z]b = B[x, y]$. l.q.q.d.

Proposición VI.8: $dC[x, y, z]b \subseteq C[x, y]$.

Demostración: Sea $u \in C[x, y, z]$; como $C[x, y, z] = A[x, y, z] \mathbin{.\!\cdot} A[x, y, z]$, se sabe que $A[x, y, z]u \subseteq A[x, y, z]$.

Si $v \in A[x, y]$, entonces $vd \in A[x, y]\, d$, de donde, por la Proposición VI.6, se deduce que $vd \in A[x, y, z]$; además, $v(du) = (vd)u \in A[x, y, z]u$, de donde $v(du) \in A[x, y, z]$ y $v(dub) \doteq (v(du))b \in A[x, y, z]b$, y se deduce entonces, en virtud de la Proposición VI.6, que $v(dub) \in A[x, y]$. Se concluye que $A[x, y](dub) \subseteq A[x, y]$, o sea $dub \in A[x, y] \mathbin{.\!\cdot} A[x, y] = C[x, y]$. l.q.q.d.

Proposición VI.9: $bC[x, y]\, d \subseteq C[x, y, z]$.

Demostración: Sea $u \in C[x, y]$; dado que $C[x, y] = A[x, y] \mathbin{.\!\cdot} A[x, y]$, se tiene $A[x, y]u \subseteq A[x, y]$.

Si $v \in A[x, y, z]$, entonces $vb \in A[x, y, z]b$ de donde, en virtud de la Proposición VI.6, se deduce que $vb \in A[x, y]$; además, $v(bu) = (vb)u \in A[x, y]u$, de donde $v(bu) \in A[x, y]$ y $v(bud) = (v(bu))\, d \in A[x, y]\, d$, y se deduce entonces, en virtud de la Proposición VI.6, que $v(bud) \in A[x, y, z]$. Se concluye así que $A[x, y, z](bud) \subseteq A[x, y, z]$, o sea $bud \in A[x, y, z] \mathbin{.\!\cdot} A[x, y, z] = C[x, y, z]$. l.q.q.d.

Proposición VI.10: *Si* $(u, v) \in \mathcal{R}[x, y, z]$, *entonces* $(dub, dvb) \in \mathcal{R}[x, y]$.

Demostración: Puesto que $(u, v) \in C[x, y, z] \times C[x, y, z]$, se deduce de la Proposición VI.8 que $(dub, dvb) \in C[x, y] \times C[x, y]$. Además, dado que $(u, v) \in \mathcal{S}_y$, se sabe, en virtud de la Proposición II.4, que $wu = wv$ para todo elemento w de H_y. Ahora bien, como $d \in H_y \mathbin{.\!\cdot} y$, se tiene que $yd \in H_y$, de donde $y(dub) = ((yd)u)b = ((yd)v)b = y(dvb)$, y es claro que dub y dvb son elementos de $H_y \mathbin{.\!\cdot} y$, pues $C[x, y] \subseteq H_y \mathbin{.\!\cdot} y$; se concluye entonces que $(dub, dvb) \in \mathcal{S}_y$. l.q.q.d.

Proposición VI.11: *Si* $(u, v) \in \mathcal{R}[x, y]$, *entonces* $(bud, bvd) \in \mathcal{R}[x, y, z]$.

Demostración: Dado que $(u, v) \in C[x, y] \times C[x, y]$, se deduce de la Proposición VI.9 que $(bud, bvd) \in C[x, y, z] \times C[x, y, z]$. Además, como $(u, v) \in \mathcal{S}_y$, se sabe, por la Proposición II.4, que $wu = wv$ para todo elemento w de H_y. Puesto que $b \in H_y \mathbin{.\!\cdot} y$, se tiene que $yb \in H_y$, de donde $y(bud) = ((yb)u)\, d = ((yb)v)\, d = y(bvd)$, y es evidente que bud y bvd son elementos de $H_y \mathbin{.\!\cdot} y$, pues $C[x, y, z] \subseteq H_y \mathbin{.\!\cdot} y$; se concluye, por lo tanto, que $(bud, bvd) \in \mathcal{S}_y$. l.q.q.d.

Proposición VI.12: *Si* $u \in C[x, y, z]$ *y* $v \in C[x, y, z]$, *entonces* $(d(uv)b, (dub)(dvb)) \in \mathcal{R}[x, y]$.

Demostración: En virtud de la Proposición VI.8, se sabe que $(d(uv)b, (dub)(dvb)) \in C[x, y] \times C[x, y]$. Es evidente que $y(du) \in H_y$, pues $d \in H_y \mathbin{.\!\cdot} y$, $u \in C[x, y, z] \subseteq H_y \mathbin{.\!\cdot} y$, y $H_y \mathbin{.\!\cdot} y$ es un subsemigrupo de S. Puesto que $g \in H_y$ y $g = y\, d = (gb)\, d = g(bd)$, se deduce fácilmente que $w = w(bd)$ para todo elemento w de H_y; luego $(y(du))(bd) = y(du)$, y por lo tanto $y(dub)(dvb) =$

$(y(du)(bd))(vb) = (y(du))(vb) = y(d(uv)b)$, y es evidente que $d(uv)b$ y $(dub)(dvb)$ son elementos de $H_y \therefore y$, pues $C[x, y] \subseteq H_y \therefore y$; se concluye, entonces, que $(d(uv)b, (dub)(dvb)) \in \mathcal{S}_y$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.13: *Si* $u \in C[x, y]$ *y* $v \in C[x, y]$, *entonces* $(b(uv)d, (bud) \cdot (bvd)) \in \mathcal{R}[x, y, z]$.

Demostración: En virtud de la Proposición VI.9, se sabe que $(b(uv)d, (bud) \cdot (bvd)) \in C[x, y, z] \times C[x, y, z]$. Es claro que $y(bu) \in H_y$, pues $b \in H_y \therefore y$, $u \in C[x, y] \subseteq H_y \therefore y$, y $H_y \therefore y$ es un subsemigrupo de S. Ahora bien, como $y = gb = (yd)b = y(db)$, se deduce sin dificultad que $w = w(db)$ para todo elemento w de H_y; luego $y(bu) = (y(bu))(db)$, de donde $y(b(uv)d = (y(bu))(vd) = (y(bu)(db))(vd) = y((bud)(bvd))$, y es evidente que $b(uv)d$ y $(bud) \cdot (bvd)$ son elementos de $H_y \therefore y$, pues $C[x, y, z] \subseteq H_y \therefore y$; así, se concluye que $(b(uv)d, (bud)(bvd)) \in \mathcal{S}_y$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.14: *Si* $u \in C[x, y, z]$, *entonces* $(u, b(dub)d) \in \mathcal{R}[x, y, z]$.

Demostración: En primer lugar, por las Proposiciones VI.8 y VI.9, se tiene que $(u, b(dub)d) \in C[x, y, z] \times C[x, y, z]$. Como ya se hizo notar en la demostración de la Proposición VI.12, se tiene también que $w = w(bd)$ para todo elemento w de H_y. Puesto que $y \in H_y$ y $u \in H_y \therefore y$, se deduce que $(y(bd))\, u = yu \in H_y$, de donde $y(b(dub)d) = ((y(bd))u)(bd) = (yu)(bd) = yu$, y es claro que u y $b(dub)d$ son elementos de $H_y \therefore y$, pues $C[x, y, z] \subseteq H_y \therefore y$; se tiene pues que $(u, b(dub)d) \in \mathcal{S}_y$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.15: *Si* $u \in C[x, y]$, *entonces* $(u, d(bud)b) \in \mathcal{R}[x, y]$.

Demostración: En virtud de las Proposiciones VI.9 y VI.8, se deduce inmediatamente que $(u, d(bud)b) \in C[x, y] \times C[x, y]$. Como en la demostración de la Proposición VI.13, se tiene que $w = w(db)$ para todo elemento w de H_y. Ahora bien, puesto que $u \in C[x, y] = A[x, y] \therefore A[x, y]$ e $y \in (H_{xy} \therefore x) \frown H_y = A[x, y]$, se sabe que $yu \in A[x, y]$, de donde, en particular, se deduce que $yu \in H_y$. Luego, dado que $yu \in H_y$ e $y \in H_y$, se sabe que $y = y(db)$ e $yu = (yu)(db)$, de donde $y(d(bud)b) = ((y(db))u)(db) = (yu)(db) = yu$, y es evidente que u y $d(bud)b$ son elementos de $H_y \therefore y$, pues $C[x, y] \subseteq H_y \therefore y$; se concluye así que $(u, d(bud)b) \in \mathcal{S}_y$. l.q.q.d.

En virtud de las condiciones supuestas en relación con x, y, y z, se sabe que $H_y \therefore y$ no es vacío (pues b y d son elementos de $H_y \therefore y$). Esto quiere decir que $C[x, y, z]$ no es vacío y que $C[x, y]$ no es vacío, de modo que $\Gamma_1[x, y, z] = C[x, y, z]/\mathcal{R}[x, y, z]$ y $\Gamma_1[x, y] = C[x, y]/\mathcal{R}[x, y]$.

Es posible (en virtud de las Proposiciones VI.8 y VI.10) definir una función $\psi_1[x, y, z]$ de $\Gamma_1[x, y, z]$ en $\Gamma_1[x, y]$ como sigue: si $K \in \Gamma_1[x, y, z]$ y si $k \in K$, entonces $\psi_1[x, y, z]$ asigna a K el elemento de $\Gamma_1[x, y]$ que contiene dkb.

Es también posible (en virtud de las Proposiciones VI.9 y VI.11) definir una función $\omega_1[x, y, z]$ de $\Gamma_1[x, y]$ en $\Gamma_1[x, y, z]$ como sigue: si $K \in \Gamma_1[x, y]$ y si $k \in K$, entonces $\omega_1[x, y, z]$ asigna a K el elemento de $\Gamma_1[x, y, z]$ que contiene bkd.

PROPOSICIÓN VI.16: *$\psi_1[x, y, z]$ y $\omega_1[x, y, z]$ son funciones mutualmente inversas tales que*: (i) *$\psi_1[x, y, z]$ es un isomorfismo de $\Gamma_1[x, y, z]$ sobre $\Gamma_1[x, y]$; y* (ii) *$\omega_1[x, y, z]$ es un isomorfismo de $\Gamma_1[x, y]$ sobre $\Gamma_1[x, y, z]$.*

Demostración: En virtud de la Proposición VI.14, es evidente que $\psi_1[x, y, z]$ o $\omega_1[x, y, z]$ es la función identidad (el símbolo o se usa para designar la composición de funciones); y en virtud de la Proposición VI.15, es igualmente claro que $\omega_1[x, y, z]$ o $\psi_1[x, y, z]$ es la función identidad.

De este razonamiento se deduce que $\psi_1[x, y, z]$ y $\omega_1[x, y, z]$ son funciones mutualmente inversas, que $\psi_1[x, y, z]$ es una función biunívoca de $\Gamma_1[x, y, z]$ sobre $\Gamma_1[x, y]$, y que $\omega_1[x, y, z]$ es una función biunívoca de $\Gamma_1[x, y]$ sobre $\Gamma_1[x, y, z]$.

Ahora bien, en virtud de las Proposiciones VI.12 y VI.13, es evidente que $\psi_1[x, y, z]$ y $\omega_1[x, y, z]$ son homomorfismos. Se concluye entonces que $\psi_1[x, y, z]$ es un isomorfismo de $\Gamma_1[x, y, z]$ sobre $\Gamma_1[x, y]$, y que $\omega_1[x, y, z]$ es un isomorfismo de $\Gamma_1[x, y]$ sobre $\Gamma_1[x, y, z]$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.17: *$dD[x, y, z]b \subseteq D[x, y]$.*

Demostración: Sea $u \in D[x, y, z]$; como $D[x, y, z] = B[x, y, z] \mathbin{.\!\cdot} B[x, y, z]$, se sabe que $B[x, y, z]u \subseteq B[x, y, z]$.

Si $v \in B[x, y]$, entonces $vd \in B[x, y]d$, de donde, por la Proposición VI.7, se deduce que $vd \in B[x, y, z]$; además, $v(du) = (vd)u \in B[x, y, z]u$, de donde $v(du) \in B[x, y, z]$ y $v(dub) \in B[x, y, z]b$, y se deduce entonces de la Proposición VI.7 que $v(dub) \in B[x, y]$. Se concluye que $B[x, y](dub) \subseteq B[x, y]$, o sea $dub \in B[x, y] \mathbin{.\!\cdot} B[x, y] = D[x, y]$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.18: *$bD[x, y]d \subseteq D[x, y, z]$.*

Demostración: Sea $u \in D[x, y]$; puesto que $D[x, y] = B[x, y] \mathbin{.\!\cdot} B[x, y]$, se sabe que $B[x, y]u \subseteq B[x, y]$.

Si $v \in B[x, y, z]$, entonces $vb \in B[x, y, z]b$, de donde, en virtud de la Proposición VI.7, se deduce que $vb \in B[x, y]$; además, $v(bu) = (vb)u \in B[x, y]u$, de donde $v(bu) \in B[x, y]$ y $v(bud) \in B[x, y]d$, y se deduce entonces, en virtud de la Proposición VI.7, que $v(bud) \in B[x, y, z]$. Se concluye así que $B[x, y, z](bud) \subseteq B[x, y, z]$, o sea $bud \in B[x, y, z] \mathbin{.\!\cdot} B[x, y, z] = D[x, y, z]$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.19: *Si $(u, v) \in \Theta[x, y, z]$, entonces $(dub, dvb) \in \Theta[x, y]$.*

Demostración: En virtud de la Proposición VI.17, se sabe que $(dub, dvb) \in D[x, y] \times D[x, y]$, pues $(u, v) \in D[x, y, z] \times D[x, y, z]$. Como $(u, v) \in \mathcal{S}_z$, se sabe que $zu = zv$, de modo que $(xy)(dub) = ((xy)d)(ub) = z(ub) = (zu)b = (zv)b = z(vb) = ((xy)d)(vb) = (xy)(dvb)$, y es claro que dub y dvb son elementos de $H_{xy} \mathbin{.\!\cdot} xy$, pues $D[x, y] \subseteq H_{xy} \mathbin{.\!\cdot} xy$; se deduce que $(dub, dvb) \in \mathcal{S}_{xy}$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.20: *Si $(u, v) \in \Theta[x, y]$, entonces $(bud, bvd) \in \Theta[x, y, z]$.*

Demostración: Es evidente, en virtud de la Proposición VI.18, que $(bud, bvd) \in D[x, y, z] \times D[x, y, z]$, pues $(u, v) \in D[x, y] \times D[x, y]$. Además, como

$(u, v) \in \mathcal{S}_{xy}$, se sabe que $(xy)u = (xy)v$, de donde $z(bud) = (zb)(ud) = (xy)(ud) = ((xy)u)d = ((xy)v)d = (xy)(vd) = (zb)(vd) = z(bvd)$, y es claro que bud y bvd son elementos de $H_z \,.\!\cdot\, z$, pues $D[x, y, z] \subseteq H_z \,.\!\cdot\, z$; se deduce que $(bud, bvd) \in \mathcal{S}_z$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.21: *Si* $u \in D[x, y, z]$ *y* $v \in D[x, y, z]$, *entonces* $(d(uv)b, (dub)(duv)) \in \Theta[x, y]$.

Demostración: Es claro, por la Proposición VI.17, que $(d(uv)b, (dub)(duv)) \in D[x, y] \times D[x, y]$. Ahora bien, como $u \in D[x, y, z]$ y $D[x, y, z] \subseteq H_z \,.\!\cdot\, z$, se sabe que $zu \in H_z$. Luego, en virtud de la Proposición VI.3, se tiene que $(zu)(bd) = zu$, de donde $(xy)((dub)(dvb)) = (((xy)d)u)(bd)(vb) = (zu)(bd)(vb) = (zu)(bd)(vb) = (zu)(vb) = z(uvb) = ((xy)d)(uvb) = (xy)(d(uv)b)$, y es evidente que $(dub)(dvb)$ y $d(uv)b$ son elementos de $H_{xy} \,.\!\cdot\, xy$, pues $D[x, y] \subseteq H_{xy} \,.\!\cdot\, xy$; se deduce que $(d(uv)b, (dub)(dvb)) \in \mathcal{S}_{xy}$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.22: *Si* $u \in D[x, y]$ *y* $v \in D[x, y]$ *entonces* $(b(uv)d, (bud)(bvd)) \in \Theta[x, y, z]$.

Demostración: De la Proposición VI.18 se deduce inmediatamente que $(b(uv)d, (bud)(bvd)) \in D[x, y, z] \times D[x, y, z]$. Dado que $u \in D[x, y]$, y $D[x, y] \subseteq H_{xy} \,.\!\cdot\, xy$, se tiene que $(xy)u \in H_{xy}$. Entonces, por la Proposición VI.2, se deduce que $(xy)\, u = ((xy)u)(db)$, y por lo tanto se tiene que $z((bud)\,(bvd)) = ((zb)u)(db)(vd) = ((xy)u)(db)(vd) = ((xy)u)(vd) = (xy)(uvd) = (zb)\,(uvd) = z(b(uv)d)$, y es claro que $(bud)(bvd)$ y $b(uv)d$ son elementos de $H_z \,.\!\cdot\, z$, pues $D[x, y, z] \subseteq H_z \,.\!\cdot\, z$; se deduce entonces que $(b(uv)d, (bud)(bvd)) \in \mathcal{S}_z$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.23: *Si* $u \in D[x, y, z]$, *entonces* $(u, b(dub)d) \in \Theta[x, y, z]$.

Demostración: Es claro, en virtud de las Proposiciones VI.17 y VI.18, que $(u, b(dub)d) \in D[x, y, z] \times D[x, y, z]$. Puesto que $u \in D[x, y, z]$ y $D[x, y, z] \subseteq H_z \,.\!\cdot\, z$, se sabe que $zu \in H_z$; entonces, por la Proposición VI.3, se tiene que $z = z(bd)$ y $zu = (zu)(bd)$. Luego $z(b(dub)d) = (z(bd))(ubd) = (zu)(bd) = zu$, y es claro que $b(dub)d$ y u son elementos de $H_z \,.\!\cdot\, z$, pues $D[x, y, z] \subseteq H_z \,.\!\cdot\, z$; se concluye, por lo tanto, que $(u, b(dub)d) \in \mathcal{S}_z$. l.q.q.d.

PROPOSICIÓN VI.24: *Si* $u \in D[x, y]$, *entonces* $(u, d(bud)b) \in \Theta[x, y]$.

Demostración: En virtud de las Proposiciones VI.18 y VI.17, se sabe que $(u, d(bud)b) \in D[x, y] \times D[x, y]$. Puesto que $u \in D[x, y]$ y $D[x, y] \subseteq H_{xy} \,.\!\cdot\, xy$, se tiene que $(xy)u \in H_{xy}$; entonces, por la Proposición VI.2, se sabe que $(xy)u = ((xy)u)(db)$ y $xy = (xy)(db)$. Por lo tanto, $(xy)(d(bud)b) = ((xy)(db))(u(bd)) = ((xy)u)(db) = (xy)u$, y es evidente que $(d(bud)b$ y u son elementos de $H_{xy} \,.\!\cdot\, xy$, pues $D[x, y] \subseteq H_{xy} \,.\!\cdot\, xy$; se concluye, luego, que $(u, d(bud)b) \in \mathcal{S}_{xy}$. l.q.q.d.

Dado que $C[x, y, z]$ y $C[x, y]$ no son vacíos, se sabe, *a fortiori*, que $D[x, y, z]$ no es vacío y que $D[x, y]$ no es vacío. Por definición, se sabe también que $\Gamma_2[x, y, z] = D[x, y, z]/\Theta[x, y, z]$ y $\Gamma_2[x, y] = D[x, y]/\Theta[x, y]$.

Es posible (en virtud de las Proposiciones VI.17 y VI.19) definir una función $\psi_2[x, y, z]$ de $\Gamma_2[x, y, z]$ en $\Gamma_2[x, y]$ como sigue: si $K \in \Gamma_2[x, y, z]$ y $k \in K$, entonces $\psi_2[x, y, z]$ asigna a K el elemento de $\Gamma_2[x, y]$ que contiene dkb.

Es también posible (en virtud de las Proposiciones VI.18 y VI.20) definir una función $\omega_2[x, y, z]$ de $\Gamma_2[x, y]$ en $\Gamma_2[x, y, z]$ como sigue: si $K \in \Gamma_2[x, y]$ y $k \in K$, entonces $\omega_2[x, y, z]$ asigna a K el elemento de $\Gamma_2[x, y, z]$ que contiene bkd.

Proposición VI.25: *$\psi_2[x, y, z]$ y $\omega_2[x, y, z]$ son funciones mutualmente inversas tales que:* (i) *$\psi_2[x, y, z]$ es un isomorfismo de $\Gamma_2[x, y, z]$ sobre $\Gamma_2[x, y]$; y* (ii) *$\omega_2[x, y, z]$ es un isomorfismo de $\Gamma_2[x, y]$ sobre $\Gamma_2[x, y, z]$.*

Demostración: En virtud de la Proposición VI.23, es evidente que $\psi_2[x, y, z]$ o $\omega_2[x, y, z]$ es la función identidad; y en virtud de la Proposición VI.24, es igualmente claro que $\omega_2[x, y, z]$ o $\psi_2[x, y, z]$ es la función identidad.

De esto se deduce que $\psi_2[x, y, z]$ y $\omega_2[x, y, z]$ son funciones mutualmente inversas, que $\psi_2[x, y, z]$ es una función biunívoca de $\Gamma_2[x, y, z]$ sobre $\Gamma_2[x, y]$, y que $\omega_2[x, y, z]$ es una función biunívoca de $\Gamma_2[x, y]$ sobre $\Gamma_2[x, y, z]$.

Pero, de las Proposiciones VI.21 y VI.22, es evidente que $\psi_2[x, y, z]$ y $\omega_2[x, y, z]$ son homomorfismos. Se concluye, entonces, que $\psi_2[x, y, z]$ es un isomorfismo de $\Gamma_2[x, y, z]$ sobre $\Gamma_2[x, y]$, y que $\omega_2[x, y, z]$ es un isomorfismo de $\Gamma_2[x, y]$ sobre $\Gamma_2[x, y, z]$. l.q.q.d.

Las dos Proposiciones a continuación son inmediatas:

Proposición VI.26: *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1[x, y, z] & \xrightarrow{\gamma[x, y, z]} & \Gamma_2[x, y, z] \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_1[x, y, z]} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_2[x, y, z]} \\ \Gamma_1[x, y,] & \xrightarrow{\gamma[x, y]} & \Gamma_2[x, y] \end{array}$$

es conmutativo.

Proposición VI.27: *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1[x, y] & \xrightarrow{\gamma[x, y]} & \Gamma_2[x, y] \\ \downarrow{\scriptstyle \omega_1[x, y, z]} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_2[x, y, z]} \\ \Gamma_1[x, y,] & \xrightarrow{\gamma[x, y, z]} & \Gamma_2[x, y, z] \end{array}$$

es conmutativo.

Para terminar, se enuncia la Proposición siguiente, que es consecuencia inmediata de cada una de las dos anteriores:

Proposición VI.28: *$\gamma[x, y, z]$ es biunívoca si y solamente si $\gamma[x, y]$ es biunívoca.*

VII. Algunas simplificaciones

Las notaciones empleadas en esta parte son las de las partes II, III, V, y VI.

Proposición VII.1: *Si x, y, z, u, y v son elementos de un semigrupo S tales que* $(y, u) \in \mathcal{H}$ *y* $(z, v) \in \mathcal{H}$, *entonces:*

a) $A[x, y, z] = A[x, u, v]$.

b) $B[x, y, z] = B[x, u, v]$.

c) $C[x, y, z] = C[x, u, v]$.

d) $D[x, y, z] = D[x, u, v]$.

e) $\mathcal{R}[x, y, z] = \mathcal{R}[x, u, v]$.

f) $\mathcal{O}[x, y, z] = \mathcal{O}[x, u, v]$.

g) $\Gamma_1[x, y, z] = \Gamma_1[x, u, v]$.

h) $\Gamma_2[x, y, z] = \Gamma_2[x, u, v]$.

i) $\gamma[x, y, z] = \gamma[x, u, v]$.

Demostración: En efecto, puesto que $H_y = H_u$ y $H_z = H_v$, es evidente que $A[x, y, z] = A[x, u, v]$ y $B[x, y, z] = B[x, u, v]$. Además, en virtud de la Proposición II.10, se sabe que $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_u$ y $\mathcal{S}_z = \mathcal{S}_v$. Todas las igualdades restantes de la conclusión son entonces inmediatas.

Proposición VII.2: *Si x, y, z, y w son elementos de un semigrupo S tales que $xH_y \frown H_z$ no es vacío y $xH_y \frown H_w$ no es vacío, entonces $\Gamma_1[x, y, z]$ y $\Gamma_1[x, y, w]$ son isomorfos y $\Gamma_2[x, y, z]$ y $\Gamma_2[x, y, w]$ son isomorfos.*

Demostración: Sean $u \in xH_y \frown H_z$ y $v \in xH_y \frown H_w$.

Puesto que $(u, z) \in \mathcal{H}$ y $(v, w) \in \mathcal{H}$, se sabe, en virtud de la Proposición anterior, que $\Gamma_1[x, y, z] = \Gamma_1[x, y, u]$, $\Gamma_2[x, y, z] = \Gamma_2[x, y, u]$, $\Gamma_1[x, y, w] = \Gamma_1[x, y, v]$, y $\Gamma_2[x, y, w] = \Gamma_2[x, y, z]$.

Como $u \in xH_y$, se sabe, por lo demostrado en la parte VI, que $\Gamma_1[x, y, u]$ y $\Gamma_1[x, y]$ son isomorfos y que $\Gamma_2[x, y, u]$ y $\Gamma_2[x, y]$ son isomorfos.

Análogamente, como $v \in xH_y$, se sabe que $\Gamma_1[x, y, v]$ y $\Gamma_1[x, y]$ son isomorfos y que $\Gamma_2[x, y, v]$ y $\Gamma_2[x, y]$ son isomorfos.

Se concluye, entonces, que $\Gamma_1[x, y, z]$ y $\Gamma_1[x, y, w]$ son isomorfos (dado que son isomorfos a $\Gamma_1[x, y]$), y que $\Gamma_2[x, y, z]$ y $\Gamma_2[x, y, w]$ son isomorfos (dado que son isomorfos a $\Gamma_2[x, y]$). l.q.q.d.

Es posible ahora simplificar la Proposición III.14 del modo siguiente:

Proposición VII.3: *Si x, y, y z son elementos de un semigrupo S tales que $xH_y \frown H_z$ no es vacío, si $H_y \cdot y$ no es vacío, y si x es cancelativo a la izquierda sobre H_y, entonces $\gamma[x, y, z]$ es biunívoca.*

Demostración: En efecto, sea $w \in xH_y \frown H_z$. Entonces, puesto que $(w, z) \in \mathcal{H}$, se deduce de la Proposición VII.1 que $\gamma[x, y, z] = \gamma[x, y, w]$. Pero, también, $w \in xH_y$, de donde, en virtud de la Proposición III.14, se sabe que $\gamma[x, y, w]$ es biunívoca. Se concluye, por lo tanto, que $\gamma[x, y, z]$ es biunívoca. l.q.q.d.

VIII. Realización de homomorfismos de grupos

Es el propósito de esta parte demostrar que, mediante una construcción sencilla, *todo* homomorfismo de grupos puede ser "realizado" por un homomorfismo de la forma $\gamma[x, y]$. Al profesor Robert P. Hunter, a quien se debe esta idea, el autor desea expresar su agradecimiento por haber sugerido que ésta fuera incluída en este trabajo.

Se supone que: $(G_1, \circ)$ y $(G_2; *)$ son grupos, y que φ es un homomorfismo de $(G_1, \circ)$ sobre $(G_2, *)$. El elemento identidad del primero se designará por e_1, y el del segundo, por e_2. Para evitar complicaciones en la notación, se supondrá que G_1 y G_2 no contienen ningún elemento en común.

Se describe a continuación la construcción de un semigrupo S (la operación en éste, como de costumbre, se escribirá multiplicativamente):

a) $S = G_1 \cup G_2$;

b) *si* $x \in S$ e $y \in S$, entonces

$$xy = \begin{cases} x \circ y & \text{si } x \in G_1 \text{ e } y \in G_1, \\ (x\varphi) * y & \text{si } x \in G_1 \text{ e } y \in G_2, \\ x * (y\varphi) & \text{si } x \in G_2 \text{ e } y \in G_1, \\ x * y & \text{si } x \in G_2 \text{ e } y \in G_2. \end{cases}$$

No ofrece ninguna dificultad verificar que esta multiplicación en S es asociativa. Es igualmente evidente que $xe_1 = x = e_1x$ para todo elemento x de S, o sea que e_1 es el elemento identidad de S. Nótese, además, que la restricción de la multiplicación en S a G_1 y a G_2 coincide, respectivamente, con $\circ$ y $*$: en otras palabras, $(G_1, \circ)$ y $(G_2, *)$ son subgrupos de S.

a) Es fácil verificar que, si u y v son elementos de G_1, entonces $(u, v) \in \mathcal{H}$: en efecto, como $(G_1, \circ)$ es un grupo, se sabe que existen elementos a, b, c, d de G_1 tales que $u = a \circ v$, $u = v \circ b$, $v = c \circ u$, y $v = u \circ d$, y consecuentemente, dado que $(G_1, \circ)$ es un subgrupo de S, se deduce que $u = av$, $u = vb$, $v = cu$, y $v = ud$, de donde $(u, v) \in \mathcal{H}$.

b) De modo análogo se demuestra que, si u y v son elementos de G_2, entonces $(u, v) \in \mathcal{H}$.

c) Por otro lado, es claro que, si $u \in G_1$ y $v \in G_2$, entonces $(u, v) \notin \mathcal{H}$: en efecto, se sabe que $u \neq v$ (pues $G_1 \frown G_2$ es vacío); además, en virtud de la definición de la multiplicación en S, se sabe que $vw \in G_2$ para todo elemento w de S, de donde se deduce que $u \neq vw$ para todo elemento w de S. Luego $(u, v) \notin \mathcal{H}$.

d) De lo dicho en los tres últimos párrafos se deduce que G_1 y G_2 son las únicas $\mathcal{H}$-clases de S. Puesto que $e_1 \in G_1$ y $e_2 \in G_2$, se concluye que $H_{e_1} = G_1$ y $H_{e_2} = G_2$.

e) Aplicando la Proposición II.12, se deduce de esto último que $G_1 = H_{e_1}$

$\subseteq H_{e_1} \therefore e_1$ y $G_2 = H_{e_2} \subseteq H_{e_2} \therefore e_2$, y también que $\pi_{e_1} \mid G_1$ es un isomorfismo de G_1 sobre Γ_{e_1} y $\pi_{e_2} \mid G_2$ es un isomorfismo de G_2 sobre Γ_{e_2}.

f) Se verifica ahora que $e_2 H_{e_1} = H_{e_2 e_1}$: En efecto, $e_2 H_{e_1} = \{e_2 g \mid g \in H_{e_1}\} = \{e_2 g \mid g \in G_1\} = \{e_2 * (g\varphi) \mid g \in G_1\} = \{g\varphi \mid g \in G_1\} = G_2$. Además, como $e_2 e_1 = e_2$, se tiene que $H_{e_2 e_1} = H_{e_2} = G_2$. Luego $e_2 H_{e_1} = H_{e_2 e_1}$.

g) Aplicando ahora las proposiciones V.13 y V.14, se tiene que $\Gamma_1[e_2, e_1] = \Gamma_{e_1}$ y $\Gamma_2[e_2, e_1] = \Gamma_{e_2 e_1} = \Gamma_{e_2}$.

Es posible, finalmente, enunciar el resultado deseado:

PROPOSICIÓN: *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & G_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{e_1} \mid G_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{e_2} \mid G_2} \\ \Gamma_1[e_2, e_1] & \xrightarrow{\quad\gamma[e_2, e_1]\quad} & \Gamma_2[e_2, e_1] \end{array}$$

es conmutativo (por lo tanto, $\gamma[e_2, e_1]$ es una "realización" de φ).

Demostración: Sea $g \in G_1$. Puesto que $e_2 g = e_2 * (g\varphi) = g\varphi \in G_2 = H_{e_2}$, se sabe que $g \in H_{e_2} \therefore e_2$; además, puesto que $g\varphi \in G_2$ y $G_2 \subseteq H_{e_2} \therefore e_2$, se tiene que $g\varphi \in H_{e_2} \therefore e_2$. Finalmente, como $e_2 g = e_2 * (g\varphi) = e_2(g\varphi)$, se deduce que $(g, g\varphi) \in \mathbb{S}_{e_2}$. De esto y de la definición de $\gamma[e_2, e_1]$ se concluye que $(g(\pi_{e_1} \mid G_1))\gamma[e_2, e_1] = (g\varphi)(\pi_{e_2} \mid G_2)$. l.q.q.d.

THE GEORGIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, ATLANTA, GEORGIA

REFERENCIAS

[1] J. R. BASTIDA, *Grupos y homomorfismos asociados con un semigrupo, I*, Bol. Soc. Mat. Mex., **8** (1963), 26–45.